

Plaquette 2 - Angles orientés : alignement, orthogonalité et cocyclicité

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Tout le chapitre tient dans une seule formule : l'**argument d'un quotient de différences d'affixes est un angle orienté**. À partir de là, chaque configuration devient un test à faire sur un nombre complexe — alignement si le quotient est réel, orthogonalité s'il est imaginaire pur, égalité de longueurs si son module vaut 1. On calcule donc le quotient, puis on lit sa nature : c'est la seule méthode de la plaquette, mais elle répond à toutes les questions.

Exercice 1 - Un angle et un rapport de longueurs

On donne A, B, C d'affixes $1, 3$ et $2 + i\sqrt{3}$. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et le rapport $\frac{AC}{AB}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 2 - Tester une orthogonalité

Soit A, B, C d'affixes $1 + i, 4 + 2i$ et $4i$. Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Préciser sa nature exacte.

Exercice 3 - Tester un alignement

Soit A, B, C d'affixes $1 + 2i, 3 + 5i$ et $-1 - i$. Démontrer que ces trois points sont alignés, et préciser la position de A sur le segment $[BC]$.

Exercice 4 - Angle entre deux droites

On donne $A(1), B(4), C(2i)$ et $D(2i + 2 + 2i\sqrt{3})$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, puis l'angle géométrique entre les droites (AB) et (CD) , en degrés.

Exercice 5 - Quatre points cocycliques

Soit A, B, C, D d'affixes $1, -1, i$ et $-i$. Démontrer, en utilisant le birapport, que ces quatre points sont cocycliques. Retrouver le résultat autrement.

Exercice 6 - Le cercle de diamètre AB

Soit A et B deux points distincts, et M un point distinct de A et B . Démontrer que M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$ est imaginaire pur.

Exercice 7 - Nature d'un quadrilatère

Soit A, B, C, D d'affixes $0, 3, 4 + 2i$ et $1 + 2i$. Déterminer la nature précise du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 8 - Un angle non remarquable

Soit $A(2 + i), B(5 + 2i)$ et $C(3 + 4i)$. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique, puis donner une valeur approchée en degrés de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, arrondie au dixième.

Exercice 9 - Triangle équilatéral direct

On donne $A(2 + i)$ et $B(5 + i)$. Déterminer l'affixe du point C tel que le triangle ABC soit équilatéral **direct**, c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 10 - Une caractérisation élégante

Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On admet que ABC est équilatéral direct si et seulement si $z_A + jz_B + j^2z_C = 0$.

- Vérifier cette caractérisation sur le triangle de sommets $1, j^2$ et j .
- Le triangle de sommets $0, 2$ et $1 + i\sqrt{3}$ est-il équilatéral direct ou indirect ?

Exercice 11 - Trois points et un cercle

Soit $A(1), B(i), C(-1)$ et $D(2)$. Les quatre points sont-ils cocycliques ? Justifier de deux façons.

Exercice 12 - Un lieu d'angle constant

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z , distincts de 1 , tels que $\arg\left(\frac{z-1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π .

Exercice 13 - Orthocentre et cercle

Soit A, B, C trois points du cercle unité, d'affixes a, b, c de module 1 . On pose $h = a + b + c$ et on note H le point d'affixe h .

Démontrer que $(AH) \perp (BC)$, lorsque $H \neq A$ et $B \neq C$.

Exercice 14 - Cap et changement de cap

Un bateau navigue dans un plan muni d'un repère orthonormé gradué en milles nautiques, l'axe des ordonnées pointant vers le nord. Il part du point A d'affixe $2 + 3i$ et rejoint le point B d'affixe $6 + 7i$, puis met le cap sur C d'affixe $3 + 10i$.

- Déterminer l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et la distance AB .
- Calculer $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$, puis en déduire l'angle de changement de cap en B , en degrés.
- Le virage se fait-il vers bâbord (gauche) ou tribord (droite) ?

Exercice 15 - Bilan : une configuration complète

Soit A, B, C d'affixes $a = 2$, $b = 2i$ et $c = -1 + i$.

- a) Déterminer la nature du triangle ABC .
- b) Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit et son rayon.
- c) Le point D d'affixe $1 + 3i$ est-il sur ce cercle ? Justifier par un calcul d'angle.