

## Plaquette 4 - Ensembles de points : cercles, droites et lignes de niveau

### Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

#### Exercices

#### Méthode

Une condition portant sur  $z$  décrit un **ensemble de points**. Deux réflexes suffisent la plupart du temps : reconnaître une **égalité de distances** — cercle si c'est une distance fixée, médiatrice si ce sont deux distances égales — ou, à défaut, poser  $z = x + iy$  et développer jusqu'à obtenir une équation de droite ou de cercle. Quand la condition porte sur un **argument**, on ne trouve plus une figure entière mais une portion : demi-droite, cercle privé de points, droite privée de points. C'est là que se jouent les erreurs : ne pas oublier les points **exclus**.

#### Exercice 1 - Un cercle et une médiatrice

Déterminer et décrire les ensembles suivants :

- a)  $E_1$  : ensemble des  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z - 3 + 2i| = 4$ .
- b)  $E_2$  : ensemble des  $M$  tels que  $|z - 1| = |z - i|$ .

#### Exercice 2 - Un coefficient devant $z$

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|2z - 4 + 2i| = 6$ .

#### Exercice 3 - Un rapport de distances

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z| = 2|z - 3|$ .

#### Exercice 4 - Parties réelle et imaginaire

Décrire les ensembles suivants :

- a)  $\operatorname{Re}(z) = 3$
- b)  $\operatorname{Im}(z) \leq 2$
- c)  $z\bar{z} = 9$
- d)  $z + \bar{z} = 4$

#### Exercice 5 - Une condition sur un argument

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{3}$  modulo  $2\pi$ . Que devient cet ensemble si la condition est prise modulo  $\pi$  ?

#### Exercice 6 - Un quotient imaginaire pur

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$ , distincts de 1 et de  $-1$ , tels que  $\frac{z-1}{z+1}$  soit imaginaire pur.

**Exercice 7 - Un quotient réel**

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$ , distincts de 1 et de  $-1$ , tels que  $\frac{z-1}{z+1}$  soit **réel**.

**Exercice 8 - Une condition toujours vraie**

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z - 2i| = |\bar{z} + 2i|$ .

**Exercice 9 - Une somme de carrés de distances**

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 10$ .

**Exercice 10 - Quand le carré est réel**

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  non nulle tels que  $z^2$  soit **réel**.  
Comparer avec l'ensemble où  $z^2$  est imaginaire pur.

**Exercice 11 - Une somme avec un inverse**

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  non nulle tels que  $z + \frac{1}{z}$  soit réel.

**Exercice 12 - Intersection de deux ensembles**

Déterminer les points communs aux deux ensembles  $C: |z - 2| = 2$  et  $D: |z| = |z - 4|$ .

**Exercice 13 - Un disque**

Décrire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant simultanément  $|z - i| \leq 3$  et  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ . Ce domaine contient-il le point d'affixe  $2 + 3i$  ?

**Exercice 14 - Une équation en  $z$  et son conjugué**

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) - 4 = 0$ .

**Exercice 15 - Couverture de deux antennes**

Deux antennes relais sont installées dans un plan gradué en kilomètres : l'antenne  $A$  à l'origine, de portée 5 km, et l'antenne  $B$  au point d'affixe 6, de portée 4 km.

- Écrire, à l'aide de modules, les conditions « le point  $M$  est couvert par  $A$  » et « le point  $M$  est couvert par  $B$  ».
- Déterminer les affixes des deux points situés à la **limite** des deux zones, arrondies au millième.
- Sur l'axe reliant les deux antennes, sur quelle longueur la couverture est-elle double ?