Plaquette 4 – Ensembles de points : cercles, droites et lignes de niveau

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Une condition portant sur z décrit un **ensemble de points**. Deux réflexes suffisent la plupart du temps : reconnaître une **égalité de distances** — cercle si c'est une distance fixée, médiatrice si ce sont deux distances égales — ou, à défaut, poser $z = x + iy$ et développer jusqu'à obtenir une équation de droite ou de cercle. Quand la condition porte sur un **argument**, on ne trouve plus une figure entière mais une portion : demi-droite, cercle privé de points, droite privée de points. C'est là que se jouent les erreurs : ne pas oublier les points **exclus**.

Exercice 1 – Un cercle et une médiatrice

Déterminer et décrire les ensembles suivants :

a) E_1 : ensemble des M d'affixe z tels que $|z - 3 + 2i| = 4$.

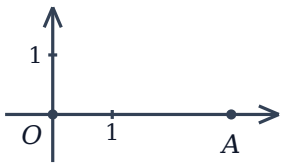
b) E_2 : ensemble des M tels que $|z - 1| = |z - i|$.

Exercice 2 – Un coefficient devant z

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z - 4 + 2i| = 6$.

Exercice 3 – Un rapport de distances

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z| = 2|z - 3|$.



Les points O et A d'affixe 3

Exercice 4 – Parties réelle et imaginaire

Décrire les ensembles suivants :

a) $\mathrm{Re}(z) = 3$

b) $\mathrm{Im}(z) \leq 2$

c) $z\overline{z} = 9$

d) $z + \overline{z} = 4$

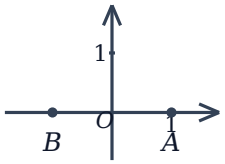
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une condition sur un argument

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z-1) = \frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Que devient cet ensemble si la condition est prise modulo π ?

Exercice 6 – Un quotient imaginaire pur

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, distincts de 1 et de -1, tels que $\frac{z-1}{z+1}$ soit imaginaire pur.



Les points $A(1)$ et $B(-1)$

Exercice 7 – Un quotient réel

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, distincts de 1 et de -1, tels que $\frac{z-1}{z+1}$ soit **réel**.

Exercice 8 – Une condition toujours vraie

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2i| = |\overline{z}+2i|$.

Exercice 9 – Une somme de carrés de distances

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 10$.

Exercice 10 – Quand le carré est réel

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z non nulle tels que z^2 soit **réel**.
Comparer avec l'ensemble où z^2 est imaginaire pur.

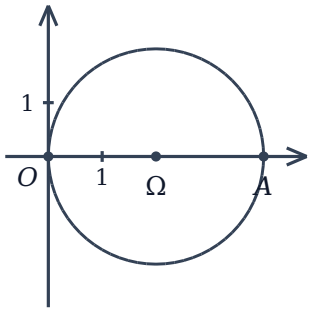
Exercice 11 – Une somme avec un inverse

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z non nulle tels que $z + \frac{1}{z}$ soit réel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Intersection de deux ensembles

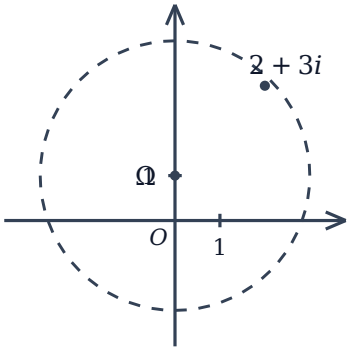
Déterminer les points communs aux deux ensembles $C : |z-2| = 2$ et $D : |z| = |z-4|$.



Le cercle C de centre $\Omega(2)$ et de rayon 2, et le point $A(4)$

Exercice 13 – Un disque

Décrire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant simultanément $|z-i| \leq 3$ et $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Ce domaine contient-il le point d'affixe $2+3i$?



Le point $\Omega(i)$ et le point d'affixe $2+3i$

Exercice 14 – Une équation en z et son conjugué

Montrer que l'équation $z\overline{z} + 3(z+\overline{z}) - 4 = 0$ caractérise un cercle, dont on donnera le centre et le rayon, puis l'écrire sous la forme $|z - z_\Omega| = r$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

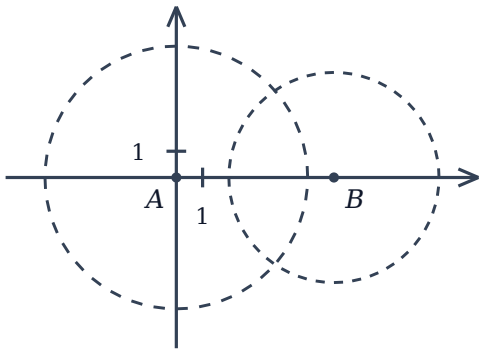
Exercice 15 – Couverture de deux antennes

Deux antennes relais sont installées dans un plan gradué en kilomètres : l'antenne A à l'origine, de portée 5 km, et l'antenne B au point d'affixe 6, de portée 4 km.

a) Écrire, à l'aide de modules, les conditions « le point M est couvert par A » et « le point M est couvert par B ».

b) Déterminer les affixes des deux points situés à la **limite** des deux zones, arrondies au millième.

c) Sur l'axe reliant les deux antennes, sur quelle longueur la couverture est-elle double ?



Les deux antennes et leurs zones de couverture

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).