Plaquette 5 – Synthèse : configurations, démonstrations et problèmes

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

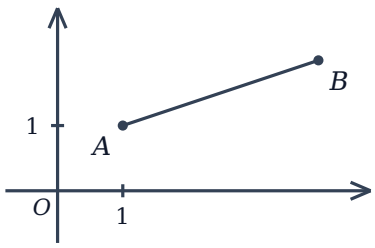
Exercices

Méthode

On rassemble ici tout le chapitre. Chaque exercice demande de choisir le bon outil : **module** pour une longueur, **argument** pour un angle, **quotient** pour une configuration, **expression complexe** pour une transformation. La force de la méthode complexe est qu'une démonstration de géométrie devient un calcul algébrique — souvent trois lignes là où une preuve synthétique en demanderait dix. Le prix à payer est la rigueur de rédaction : il faut dire **ce qu'on traduit** avant de calculer, et **ce qu'on conclut** après.

Exercice 1 – Compléter un carré

Soit A et B d'affixes $1+i$ et $4+2i$. Déterminer les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un **carré direct**, puis vérifier par le calcul des longueurs.



Le côté [AB] du carré

Exercice 2 – Une caractérisation du triangle équilatéral

On admet que ABC est équilatéral si et seulement si $z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A$.

a) Vérifier cette caractérisation sur le triangle de sommets $1, j, j^2$, où $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) Le triangle de sommets 0, 4 et $2+2i$ est-il équilatéral ?

Exercice 3 – Centre de gravité

Soit A, B, C d'affixes $2+i$, $-1+4i$ et $5+2i$.

a) Déterminer l'affixe du centre de gravité G de ABC.

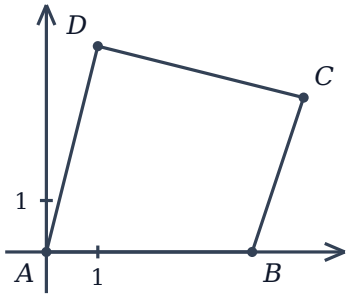
b) Vérifier que G est situé sur la médiane issue de A, aux deux tiers du segment à partir de A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Le parallélogramme de Varignon

Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixes a, b, c, d, et I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Démontrer que $IJKL$ est toujours un parallélogramme.



Un exemple de quadrilatère ABCD

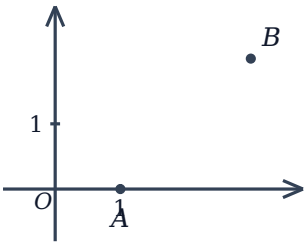
Exercice 5 – Symétries axiales

a) Déterminer l'image du point M d'affixe $3 - 2i$ par la symétrie d'axe des réels, puis par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

b) Démontrer que la symétrie d'axe $y = x$ a pour expression complexe $z' = i\overline{z}$.

Exercice 6 – Trouver le centre d'une rotation

Déterminer le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point A d'affixe 1 en le point B d'affixe $3 + 2i$.



Le point A et son image B

Exercice 7 – Triangles rectangles isocèles sur les côtés

Soit A et B d'affixes a et b. On construit le point P tel que le triangle ABP soit rectangle isocèle en P, avec $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exprimer z_P en fonction de a et b, puis calculer z_P pour $a = 0$ et $b = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Trois points de module 1 de somme nulle

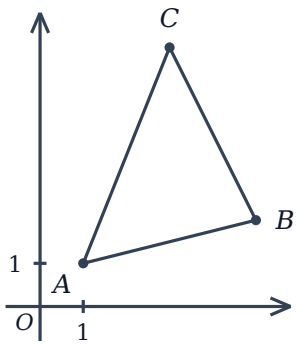
Soit a, b, c trois complexes de module 1 vérifiant $a + b + c = 0$. Démontrer que le triangle de sommets a, b, c est équilatéral.

Exercice 9 – Aire d'un triangle

On admet que l'aire du triangle ABC vaut $A = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{(z_B - z_A)}(z_C - z_A)\right)\right|$.

a) Vérifier la formule sur le triangle de sommets 0, 1 et i.

b) Calculer l'aire du triangle de sommets $1 + i$, $5 + 2i$ et $3 + 6i$.



Le triangle du b)

Exercice 10 – Intersection de deux droites

Soit $A(1 + i)$, $B(5 + 3i)$, $C(2 + 5i)$ et $D(6 - i)$. Déterminer l'affixe du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

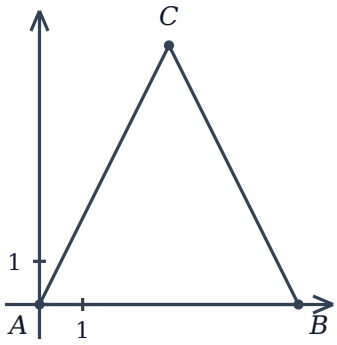
Exercice 11 – Une suite de triangles emboîtés

Soit T_0 le triangle de sommets 0, 6 et $3 + 6i$. On construit T_1 en prenant les **milieux** des côtés de T_0, puis T_2 à partir de T_1, et ainsi de suite.

a) Déterminer les sommets de T_1 et le centre de gravité de T_0.

b) Démontrer que le centre de gravité est le même pour tous les T_n.

c) Quelle est l'aire de T_n en fonction de n ?



Le triangle T_0

Exercice 12 – Cocyclicité et angle inscrit

Soit $A(1)$, $B(i)$ et $C(-1)$ trois points du cercle unité, et M le point d'affixe $-i$.

a) Calculer $\arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z_A - z_M}{z_C - z_M}\right)$.

b) Que peut-on en conclure, et quel théorème cela illustre-t-il ?

Exercice 13 – Une ligne de niveau d'un produit

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| \times |z + 1| = 1$, en posant $z = x + iy$. Cette courbe passe-t-elle par l'origine ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

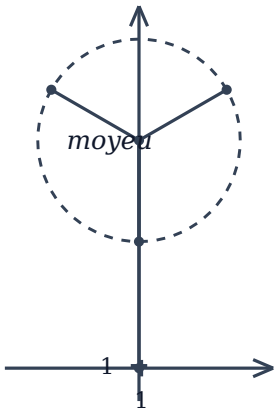
Exercice 14 – Les trois pales d'une éolienne

Une éolienne a trois pales de 40 m, régulièrement réparties, dont le moyeu est à 90 m du sol. Dans un plan vertical muni d'un repère orthonormé gradué en mètres, l'origine étant au pied du mât, l'extrémité de la première pale a pour affixe $90i + 40\,\mathrm{e}^{i\theta}$, où θ dépend du temps.

a) Donner les affixes des extrémités des trois pales en fonction de θ.

b) Pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, calculer la hauteur de chaque extrémité.

c) Quelles sont les hauteurs maximale et minimale atteintes par une extrémité de pale ?



L'éolienne : le mât et les trois pales

Exercice 15 – Bilan : une configuration complète

Soit A, B, C d'affixes $a = 1 + i$, $b = 4 + 2i$ et $c = 2 + 5i$.

a) Calculer $\dfrac{c - a}{b - a}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

b) Calculer son aire.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis l'aire de ce parallélogramme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).