Plaquette 3 – Transformations : translation, homothétie, rotation et similitudes

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Une transformation du plan devient, en complexes, une **formule d'une ligne** : $z' = az + b$. Tout le travail consiste à savoir lire a et b. Le module de a donne le rapport, son argument l'angle, et le **point fixe** donne le centre. Réciproquement, on sait écrire l'expression complexe de n'importe quelle translation, homothétie ou rotation dont on connaît les éléments. Le réflexe à acquérir : devant $z' = az + b$, on résout d'abord $z = az + b$ — le point fixe répond à la moitié des questions.

Exercice 1 – Translation : image et antécédent

Soit t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1 + 4i$.

a) Donner l'expression complexe de t, puis l'affixe de l'image de $M(3 - 2i)$.

b) Déterminer l'affixe du point dont l'image par t est le point d'affixe $5i$.

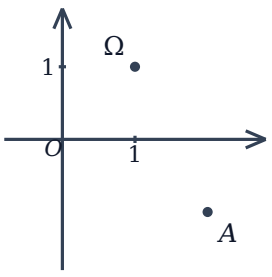
Exercice 2 – Homothétie

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $1 + i$ et de rapport 3.

a) Donner l'expression complexe de h sous la forme $z' = az + b$.

b) Déterminer l'image du point A d'affixe $2 - i$.

c) Une figure de 5 cm² est transformée par h. Quelle est l'aire de son image ?



Le centre Ω et le point A

Exercice 3 – Rotation de centre O

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Donner l'expression complexe de r.

b) Déterminer les images des points d'affixes $3 + 2i$, -1 et i.

c) Quelle est l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Rotation de centre quelconque

Soit r la rotation de centre Ω d'affixe 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Donner l'expression complexe de r sous la forme $z' = az + b$.

b) Déterminer l'image du point A d'affixe 4, et vérifier que le triangle $\Omega AA'$ est équilatéral.



Le centre Ω et le point A

Exercice 5 – Reconnaître une rotation

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f d'expression complexe $z' = iz + 1 - i$.

Exercice 6 – Reconnaître une homothétie et une symétrie

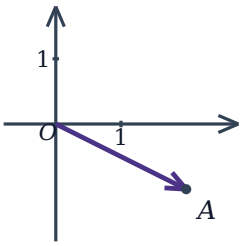
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations d'expressions complexes :

a) $z' = 2z - 3$

b) $z' = -z + 4 + 2i$

Exercice 7 – Une similitude directe

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $z' = (1 + i)z$, puis l'image du point A d'affixe $2 - i$.



Le point A d'affixe 2 − i

Exercice 8 – Une similitude de centre non trivial

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $z' = 2iz + 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Composer deux rotations

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et r_2 celle de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

a) Donner l'expression complexe de $r_2 \circ r_1$ et identifier cette transformation.

b) Que vaut r_1 composée avec elle-même trois fois ?

Exercice 10 – Composer une rotation et une translation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur d'affixe 2.

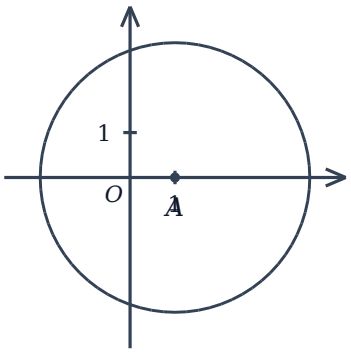
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ r$, puis de $r \circ t$. Ces deux composées sont-elles égales ?

Exercice 11 – Image d'un cercle

Soit s la similitude d'expression complexe $z' = (1 + i)z + 2$, et C le cercle de centre A d'affixe 1 et de rayon 3.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de s.

b) Déterminer l'image de C par s.



Le cercle C de centre A et de rayon 3

Exercice 12 – Image d'une droite

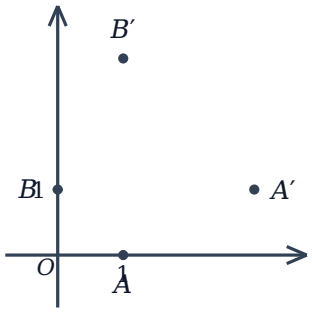
Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et D la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Déterminer une équation de l'image de D par r.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Construire la similitude à partir de deux points

Déterminer l'expression complexe de la similitude directe s qui transforme $A(1)$ en $A'(3+i)$ et $B(i)$ en $B'(1+3i)$. Préciser ensuite ses éléments caractéristiques.



Les points A, B et leurs images A′, B′

Exercice 14 – Une frise par rotations successives

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{5}$, et M_0 le point d'affixe $z_0 = 3$. On définit M_{n+1} comme l'image de M_n par r.

a) Exprimer z_n en fonction de n.

b) Montrer que les points M_0, …, M_4 forment un pentagone régulier, et calculer son périmètre à 10^{-3} près.

c) Que vaut z_{2026} ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Un bras robotisé à deux segments

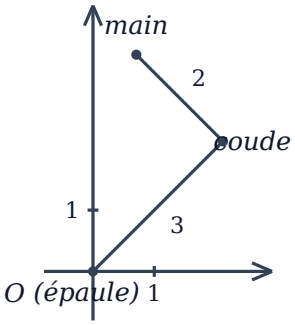
Un bras robotisé est composé de deux segments articulés. L'épaule est fixée à l'origine O. Le premier segment, de longueur 3 (en décimètres), fait un angle α avec l'axe des abscisses ; le coude se trouve donc au point d'affixe $3\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. Le second segment, de longueur 2, fait un angle β **supplémentaire** avec le premier : la main se trouve au point d'affixe

$$z_{\text{main}} = 3\,\mathrm{e}^{i\alpha} + 2\,\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}$$

a) Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et $\beta = \dfrac{\pi}{3}$, déterminer l'affixe exacte de la main, puis sa distance à l'épaule, arrondie au millième.

b) Quelle est la distance maximale que la main peut atteindre, et pour quelle valeur de β ?

c) Quelle est la distance minimale, et que décrit alors la main quand α varie ?



Le bras dans une position quelconque

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).