

Plaquette 3 - Transformations : translation, homothétie, rotation et similitudes

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Une transformation du plan devient, en complexes, une **formule d'une ligne** : $z' = az + b$. Tout le travail consiste à savoir lire a et b . Le module de a donne le rapport, son argument l'angle, et le **point fixe** donne le centre. Réciproquement, on sait écrire l'expression complexe de n'importe quelle translation, homothétie ou rotation dont on connaît les éléments. Le réflexe à acquérir : devant $z' = az + b$, on résout d'abord $z = az + b$ — le point fixe répond à la moitié des questions.

Exercice 1 - Translation : image et antécédent

Soit t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1 + 4i$.

- Donner l'expression complexe de t , puis l'affixe de l'image de $M(3 - 2i)$.
- Déterminer l'affixe du point dont l'image par t est le point d'affixe $5i$.

Exercice 2 - Homothétie

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $1 + i$ et de rapport 3.

- Donner l'expression complexe de h sous la forme $z' = az + b$.
- Déterminer l'image du point A d'affixe $2 - i$.
- Une figure de 5 cm^2 est transformée par h . Quelle est l'aire de son image ?

Exercice 3 - Rotation de centre O

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Donner l'expression complexe de r .
- Déterminer les images des points d'affixes $3 + 2i$, -1 et i .
- Quelle est l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$?

Exercice 4 - Rotation de centre quelconque

Soit r la rotation de centre Ω d'affixe 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- Donner l'expression complexe de r sous la forme $z' = az + b$.
- Déterminer l'image du point A d'affixe 4, et vérifier que le triangle $\Omega AA'$ est équilatéral.

Exercice 5 - Reconnaître une rotation

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f d'expression complexe $z' = iz + 1 - i$.

Exercice 6 - Reconnaître une homothétie et une symétrie

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations d'expressions complexes :

- a) $z' = 2z - 3$
- b) $z' = -z + 4 + 2i$

Exercice 7 - Une similitude directe

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $z' = (1 + i)z$, puis l'image du point A d'affixe $2 - i$.

Exercice 8 - Une similitude de centre non trivial

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $z' = 2iz + 4$.

Exercice 9 - Composer deux rotations

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et r_2 celle de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- a) Donner l'expression complexe de $r_2 \circ r_1$ et identifier cette transformation.
- b) Que vaut r_1 composée avec elle-même trois fois ?

Exercice 10 - Composer une rotation et une translation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur d'affixe 2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ r$, puis de $r \circ t$. Ces deux composées sont-elles égales ?

Exercice 11 - Image d'un cercle

Soit s la similitude d'expression complexe $z' = (1 + i)z + 2$, et C le cercle de centre A d'affixe 1 et de rayon 3.

- a) Déterminer les éléments caractéristiques de s .
- b) Déterminer l'image de C par s .

Exercice 12 - Image d'une droite

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et D la droite d'équation $y = 2x + 1$. Déterminer une équation de l'image de D par r .

Exercice 13 - Construire la similitude à partir de deux points

Déterminer l'expression complexe de la similitude directe s qui transforme $A(1)$ en $A'(3 + i)$ et $B(i)$ en $B'(1 + 3i)$. Préciser ensuite ses éléments caractéristiques.

Exercice 14 - Une frise par rotations successives

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{5}$, et M_0 le point d'affixe $z_0 = 3$. On définit M_{n+1} comme l'image de M_n par r .

- a) Exprimer z_n en fonction de n .
- b) Montrer que les points $M_0, \dots, M_4$ forment un pentagone régulier, et calculer son périmètre à 10^{-3} près.
- c) Que vaut z_{2026} ?

Exercice 15 - Un bras robotisé à deux segments

Un bras robotisé est composé de deux segments articulés. L'épaule est fixée à l'origine O . Le premier segment, de longueur 3 (en décimètres), fait un angle α avec l'axe des abscisses ; le coude se trouve donc au point d'affixe $3e^{i\alpha}$. Le second segment, de longueur 2, fait un angle β **supplémentaire** avec le premier : la main se trouve au point d'affixe

$$z_{\text{main}} = 3e^{i\alpha} + 2e^{i(\alpha + \beta)}$$

- a) Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$, déterminer l'affixe exacte de la main, puis sa distance à l'épaule, arrondie au millièm.
- b) Quelle est la distance maximale que la main peut atteindre, et pour quelle valeur de β ?
- c) Quelle est la distance minimale, et que décrit alors la main quand α varie ?