Plaquette 1 – Matrice d'adjacence, chemins et distributions stables

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et théorèmes du cours.

- Un **graphe** est un ensemble de **sommets** reliés par des **arêtes** (graphe non orienté) ou des **arcs** (graphe orienté).
- **Matrice d'adjacence** M : $m_{ij} = 1$ s'il existe une arête (ou un arc) de i vers j, et 0 sinon. Pour un graphe **non orienté**, M est **symétrique**.
- **Degré** d'un sommet (graphe non orienté) : nombre d'arêtes qui y aboutissent, soit la somme de la ligne correspondante.
- **Théorème des chemins** : le coefficient $(i\,;j)$ de M^n donne le **nombre de chemins de longueur** n allant de i à j.
- **Marche aléatoire** : matrice de transition T dont le coefficient $(i\,;j)$ est la probabilité d'aller de j à i (convention en colonnes) ; chaque **colonne** a pour somme 1.
- **Distribution après** n **étapes** : $P_n = T^n P_0$, avec P_0 la distribution initiale.
- **Distribution invariante** (ou stable) P : elle vérifie $TP = P$ et la somme de ses composantes vaut 1.

$$P_n = T^n P_0 \qquad TP = P \ \text{ et } \ p_1 + \cdots + p_k = 1$$

- Pour une marche « régulière » (tous les états communiquent, coefficients positifs), P_n **converge** vers P, indépendamment de P_0.
- Un graphe est **connexe** si deux sommets quelconques sont reliés par un chemin.

Correction de l'exercice 1 – Matrice d'adjacence

On place un 1 pour chaque arête, dans les **deux** sens (le graphe est non orienté).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice est **symétrique**, comme attendu pour un graphe non orienté.
- La diagonale est nulle : il n'y a pas de boucle.
- Contrôle : la somme de chaque ligne donne le degré du sommet, soit 2, 2, 3, 1. Le total 8 vaut bien deux fois le nombre d'arêtes (4).

Réponse. La matrice symétrique ci-dessus, de degrés 2, 2, 3, 1.

Correction de l'exercice 2 – Degrés et nombre d'arêtes

a) Chaque arête contribue pour 1 au degré de **deux** sommets, donc la somme des degrés vaut 2 × (nombre d'arêtes).

- Somme : $3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 12$, donc il y a $\dfrac{12}{2} = 6$ arêtes.

b) Somme des degrés : $3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 11$, un nombre **impair**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— C’est **impossible** : la somme des degrés est toujours paire (elle vaut le double du nombre d’arêtes).
— Ce raisonnement s’appelle le « lemme des poignées de main ».

Réponse. a) 6 arêtes · b) non, la somme des degrés serait impaire.

Correction de l’exercice 3 – Compter des chemins de longueur 2

a) On calcule le produit $M \times M$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— Détail du coefficient $(1\,;1)$: $0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$.

b) Coefficient $(1\,;1) = 2$: il existe 2 **chemins de longueur** 2 du sommet 1 vers lui-même, à savoir $1 \to 2 \to 1$ et $1 \to 3 \to 1$.

— Coefficient $(1\,;2) = 1$: un seul chemin de longueur 2 de 1 vers 2, c’est $1 \to 3 \to 2$.
— **Théorème utilisé** : le coefficient $(i\,;j)$ de M^n compte les chemins de longueur n de i vers j.

Réponse. a) M^2 ci-dessus · b) 2 chemins de 1 vers 1, 1 chemin de 1 vers 2.

Correction de l’exercice 4 – Chemins de longueur 3

— $M^3 = M^2 \times M$. Coefficient $(1\,;1)$: $2 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$. Coefficient $(1\,;2)$: $2 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 3$.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

— Le coefficient $(1\,;2)$ vaut 3 : il y a 3 **chemins de longueur** 3 de 1 vers 2.
— Énumération : $1 \to 2 \to 1 \to 2$, $1 \to 2 \to 3 \to 2$, $1 \to 3 \to 1 \to 2$. Cela confirme le résultat (les chemins peuvent repasser par un sommet).

Réponse. 3 chemins de longueur 3 de 1 vers 2.

Correction de l’exercice 5 – Graphe orienté

a) Ligne i, colonne j : 1 s’il existe un arc de i vers j.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **Non**, la matrice n’est pas symétrique : par exemple $m_{12} = 1$ (arc $1 \to 2$) mais $m_{21} = 0$ (pas d’arc $2 \to 1$).

— C’est normal pour un graphe **orienté** : les arcs ont un sens. Seuls les graphes non orientés ont une matrice symétrique.

Réponse. a) la matrice ci-dessus · b) non : les arcs sont orientés.

Correction de l’exercice 6 – Matrice de transition d’une marche

On remplit colonne par colonne, chaque colonne ayant pour somme 1.

— Depuis A : 0 vers A, 0,5 vers B, 0,5 vers C.
— Depuis B : 0 vers A, 0 vers B, 1 vers C.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Depuis C : 0,5 vers A, 0,5 vers B, 0 vers C.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— Contrôle : chaque colonne somme à 1 ($0 + 0{,}5 + 0{,}5$; $0 + 0 + 1$; $0{,}5 + 0{,}5 + 0$). Correct.

Réponse. La matrice T ci-dessus, à colonnes de somme 1.

Correction de l'exercice 7 – Distribution après deux étapes

— $P_1 = TP_0$ est la **première colonne** de T : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

— $P_2 = TP_1$:

— Ligne A : $0 \times 0 + 0 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

— Ligne B : $0{,}5 \times 0 + 0 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

— Ligne C : $0{,}5 \times 0 + 1 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}5 = 0{,}5$.

— $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : la somme vaut 1. Après deux étapes, le mobile est en C une fois sur deux.

Réponse. $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 – Distribution invariante (deux états)

On résout $TP = P$, soit le système

$$\begin{cases} 0{,}6a + 0{,}3b = a \\ 0{,}4a + 0{,}7b = b \end{cases}$$

— Première équation : $0{,}3b = 0{,}4a$, donc $b = \dfrac{4a}{3}$.

— (La seconde équation donne la même relation : c'est toujours le cas.)

— Normalisation : $a + \dfrac{4a}{3} = 1$, soit $\dfrac{7a}{3} = 1$ et $a = \dfrac{3}{7}$, puis $b = \dfrac{4}{7}$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}429 \\ 0{,}571 \end{pmatrix}$$

— Vérification : $0{,}6 \times \dfrac{3}{7} + 0{,}3 \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{1{,}8 + 1{,}2}{7} = \dfrac{3}{7}$. Correct.

Réponse. $P = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}429 \\ 0{,}571 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 9 – Convergence

— $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$.

— P_2 : $0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}36 + 0{,}12 = 0{,}48$; et $0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}52$.

— P_3 : $0{,}6 \times 0{,}48 + 0{,}3 \times 0{,}52 = 0{,}288 + 0{,}156 = 0{,}444$; et $0{,}556$.

— La première composante suit 1 ; 0,6 ; 0,48 ; 0,444 … et se rapproche de $\dfrac{3}{7} \approx 0{,}429$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— La convergence est **rapide** : l'écart est divisé par environ 3 à chaque étape.
— Conclusion : P_n tend vers la distribution invariante, quel que soit P_0.

Réponse. 0,6 ; 0,48 ; 0,444 : convergence vers $\frac{3}{7} \approx 0{,}429$.

Correction de l'exercice 10 – Marche sur un triangle

a) Depuis chaque sommet, le mobile part vers les deux autres avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun, et ne reste jamais sur place.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Par **symétrie** du problème, les trois sommets jouent le même rôle : la distribution invariante est uniforme.

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

— Vérification : $0 \times \frac{1}{3} + 0{,}5 \times \frac{1}{3} + 0{,}5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Correct.
— À long terme, le mobile passe autant de temps sur chaque sommet.

Réponse. a) T ci-dessus · b) $P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 – État absorbant

a) $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$.

— P_2 : $1 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}36$; et $0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$.
— P_3 : $0{,}36 + 0{,}2 \times 0{,}64 = 0{,}488$; et $0{,}8 \times 0{,}64 = 0{,}512$.

b) La seconde composante suit $0{,}8^n$, qui tend vers 0 : la première tend donc vers 1.

$$P_n \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

— Interprétation : l'état 1 étant **absorbant**, on y tombe tôt ou tard avec une probabilité qui tend vers 1 (par exemple une machine définitivement hors service).

Réponse. a) 0,2 ; 0,36 ; 0,488 · b) vers $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 – Problème : navigation sur un site

a) Chaque colonne a pour somme $0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}25 = 1$, et tous les coefficients sont dans $[0\,;1]$: c'est bien une matrice de transition.

b) La matrice est **symétrique** et les trois pages jouent le même rôle : la distribution invariante est uniforme.

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Vérification : $0{,}5 \times \frac{1}{3} + 0{,}25 \times \frac{1}{3} + 0{,}25 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Correct.

— Interprétation : à long terme, le visiteur répartit son temps équitablement entre les trois pages.

Réponse. a) colonnes de somme 1 · b) $P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 13 – Le graphe complet à quatre sommets

a) Chaque sommet est relié aux trois autres, et pas à lui-même : M a des 0 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Chaque sommet a pour degré 3, et le nombre d’arêtes est la moitié de la somme des degrés, chaque arête étant comptée à ses deux extrémités : $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

b) Le coefficient $(i\,;j)$ de M^2 est le produit de la ligne i par la colonne j. Sur la diagonale, on obtient $1 + 1 + 1 = 3$; hors de la diagonale, deux des trois produits valent 1, donc on obtient 2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $(i\,;j)$ compte les chemins de longueur 2 de i à j. Par exemple, de 1 à 2, il y a 2 chemins : $1-3-2$ et $1-4-2$; de 1 à 1, il y en a 3, un aller-retour vers chacun des trois voisins.

Réponse. a) 0 sur la diagonale, 1 ailleurs ; degrés 3 ; 6 arêtes · b) 3 sur la diagonale et 2 ailleurs : nombres de chemins de longueur 2.

Correction de l’exercice 14 – Lire un graphe probabiliste

a) Depuis A, on reste en A avec la probabilité 0,7 et on passe en B avec 0,3 ; depuis B, on passe en A avec 0,4 et on reste en B avec 0,6. Chaque colonne a pour somme 1 :

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

b) La distribution invariante $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie $TP = P$ et $a + b = 1$. La première ligne donne $0{,}7a + 0{,}4b = a$, soit $0{,}4b = 0{,}3a$ et $b = \frac{3a}{4}$. Avec $a + b = 1$, on obtient $\frac{7a}{4} = 1$, donc $a = \frac{4}{7}$ et $b = \frac{3}{7}$. À long terme, le client va en A environ 57 % des jours. **Contrôle** : $0{,}3 \times \frac{4}{7} + 0{,}6 \times \frac{3}{7} = \frac{1{,}2 + 1{,}8}{7} = \frac{3}{7}$.

Réponse. a) $T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ · b) $P = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : graphe et marche

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de degrés 1, 2, 1.

b) Coefficient $(1\,;3)$ de M^2 : $0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$.

— Il y a **un** chemin de longueur 2 de A vers C : $A \to B \to C$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Depuis A, la seule arête mène à B (probabilité 1) ; depuis C, elle mène à B ; depuis B, on va en A ou en C avec la probabilité 0,5.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

— Vérification de l'invariance : TP, ligne A : $0 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}5 + 0 = 0{,}25$; ligne B : $1 \times 0{,}25 + 0 + 1 \times 0{,}25 = 0{,}5$; ligne C : $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

— On retrouve P : la distribution est bien **invariante**.

— Remarque : les composantes sont proportionnelles aux **degrés** (1, 2, 1) — propriété générale de la marche aléatoire uniforme sur un graphe.

Réponse. a) degrés 1, 2, 1 · b) un seul chemin · c) $TP = P$: invariante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).