

Plaque 3 – Marches aléatoires sur un graphe

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et méthodes.

- **Marche aléatoire simple** : à chaque étape, le marcheur choisit **au hasard et de façon équiprobable** l'une des arêtes issues du sommet où il se trouve. La probabilité d'aller de j vers un voisin i vaut donc $\frac{1}{\deg(j)}$.
- **Matrice de transition** T : son coefficient $(i; j)$ est la probabilité d'aller de j vers i . Chaque **colonne** a pour somme 1.
- **Distribution après n étapes** : si P_0 est la colonne des probabilités de départ, alors

$$P_n = T^n P_0$$

- **Lecture des puissances** : le coefficient $(i; j)$ de T^n est la probabilité d'être en i après n étapes **sachant** qu'on est parti de j .
- **Distribution invariante** P : elle vérifie $TP = P$ et la somme de ses composantes vaut 1. On la trouve en résolvant ce système.
- **Formule pour une marche simple** : sur un graphe connexe non orienté, la distribution invariante est

$$p_i = \frac{\deg(i)}{2 \times \text{nombre d'arêtes}}$$

Les sommets les plus reliés sont les plus visités.

- **Convergence ou oscillation** : la suite P_n converge vers P si le graphe est connexe et **non biparti**. Sur un graphe biparti, la marche oscille entre deux distributions selon la parité de n .
- **État absorbant** : sommet qu'on ne quitte jamais. La marche finit par s'y arrêter.

Correction de l'exercice 1 – Construire la matrice de transition

a) Depuis chaque sommet, deux voisins sont possibles, chacun avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le marcheur ne reste jamais sur place.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

- La colonne 1 décrit les départs depuis A : 0 de rester en A , 0,5 d'aller en B , 0,5 d'aller en C .
- b) Somme de chaque colonne : $0 + 0,5 + 0,5 = 1$ ✓, et de même pour les deux autres.
- **Pourquoi c'est obligatoire** : à chaque étape, le marcheur va nécessairement **quelque part**. Les probabilités des destinations possibles se somment donc à 1.
- **Attention à ne pas confondre** : ce sont les **colonnes** qui somment à 1 avec cette convention (départ en colonne), pas les lignes. Ici la matrice est symétrique, donc les deux fonctionnent — mais ce n'est pas le cas en général.

Réponse. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$, colonnes de somme 1.

Correction de l'exercice 2 - Où est le marcheur ?

On part de $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'on applique $P_{n+1} = TP_n$.

- $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$: il a forcément quitté A.
- $P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 \\ 0,5 \times 0,5 \\ 0,5 \times 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$.
- $P_3 = \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,25 + 0,5 \times 0,25 \\ 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,25 \\ 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,375 \\ 0,375 \end{pmatrix}$.
- $P_4 = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,3125 \\ 0,3125 \end{pmatrix}$.

Étape n	1	2	3	4
$\mathbb{P}(\text{en A})$	0	0,5	0,25	0,375

- **Contrôle** : à chaque étape, la somme des trois probabilités vaut 1 ✓.
- La suite oscille autour de $\frac{1}{3}$ en s'en rapprochant : c'est ce que l'exercice suivant va démontrer.

Réponse. 0 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,375.

Correction de l'exercice 3 - La formule explicite

- a) Par symétrie, les probabilités d'être en B et en C sont égales et valent chacune $\frac{1-a_n}{2}$.
- Pour être en A à l'étape suivante, il faut venir de B ou de C, avec la probabilité $\frac{1}{2}$ dans chaque cas :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1-a_n}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1-a_n}{2} = \frac{1-a_n}{2} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

- b) La suite est **arithmético-géométrique**. Point fixe :

- $\ell = -\frac{1}{2}\ell + \frac{1}{2}$ donne $\frac{3}{2}\ell = \frac{1}{2}$, soit $\ell = \frac{1}{3}$.
- La suite $b_n = a_n - \frac{1}{3}$ vérifie $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$, avec $b_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

- **Vérifications** : $a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ ✓ ; $a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0,5$ ✓ ; $a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 0,25$ ✓.
- **Limite** : $-\frac{1}{2} < 1$, donc $a_n \rightarrow \frac{1}{3}$. La raison étant **négative**, la convergence se fait en **oscillant** autour de la limite, ce qu'on observait dans le tableau.

Réponse. a) $a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}$ · b) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 4 - La distribution invariante du triangle

On cherche $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $TP = P$ et $x + y + z = 1$.

- Ligne 1 : $0,5y + 0,5z = x$.
- Ligne 2 : $0,5x + 0,5z = y$.
- En soustrayant : $0,5y - 0,5x = x - y$, soit $1,5(y - x) = 0$, donc $x = y$. De même $y = z$.
- Avec $x + y + z = 1$: $3x = 1$, donc $x = y = z = \frac{1}{3}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** : $0,5 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \checkmark$.
- **Interprétation** : à long terme, le marcheur passe autant de temps sur chacun des trois sommets. C'est logique, les trois jouent **exactement le même rôle** (le graphe est symétrique).
- **Cohérence avec la formule du cours** : chaque sommet est de degré 2, le graphe a 3 arêtes, donc $p_i = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \checkmark$.

Réponse. $P = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$: équirépartition.

Correction de l'exercice 5 - Une marche sur un chemin

a) Depuis A, un seul voisin (B) : le marcheur y va avec la probabilité 1. Idem depuis C. Depuis B, deux voisins équiprobables.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Colonnes de somme 1 $\checkmark$.

b) $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

— $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: il est **certainement** en B.

— $P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$: il est en A ou en C, avec la même probabilité.

— $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: de nouveau certainement en B.

- **La suite ne converge pas** : elle alterne entre deux distributions selon la parité de n . Le graphe est **biparti** (groupes $\{A; C\}$ et $\{B\}$), ce qui interdit la convergence.

Réponse. a) T ci-dessus · b) B (certain), puis A ou C (0,5 chacun), puis B : la marche

oscille.

Correction de l'exercice 6 - Invariante malgré l'oscillation

a) On résout $TP = P$ avec $x + y + z = 1$:

- Ligne 1 : $0,5y = x$. Ligne 3 : $0,5y = z$. Donc $x = z = \frac{y}{2}$.
- $\frac{y}{2} + y + \frac{y}{2} = 1$ donne $2y = 1$, soit $y = 0,5$, et $x = z = 0,25$.

$$P = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

- **Contrôle par la formule des degrés** : $\deg(A) = 1$, $\deg(B) = 2$, $\deg(C) = 1$, pour 2 arêtes. Donc $p_A = \frac{1}{4}$, $p_B = \frac{2}{4}$, $p_C = \frac{1}{4}$ ✓.

b) **Non**, la suite ne converge pas.

- On a vu que P_n alterne entre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (n impair) et $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ (n pair).
- **La raison** : le graphe est **biparti**, le marcheur change de groupe à chaque pas, il ne peut donc jamais « oublier » la parité du nombre de pas.
- **Ce qui reste vrai** : la distribution invariante décrit la **proportion de temps** passée sur chaque sommet à long terme. Sur 2 000 pas, le marcheur sera environ 1 000 fois en B , 500 fois en A et 500 fois en C ✓ — la moyenne des deux distributions alternées est bien $(0,25; 0,5; 0,25)$.

Réponse. a) $(0,25; 0,50; 0,25)$ · b) non : le graphe est biparti, P_n oscille selon la parité de n .

Correction de l'exercice 7 - Une marche sur quatre sommets

a) On compte les voisins de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D
Degré	2	2	3	1

- Somme des degrés : 8, donc le graphe compte $\frac{8}{2} = 4$ arêtes ✓.

b) La formule du cours donne $p_i = \frac{\deg(i)}{2 \times \text{nombre d'arêtes}} = \frac{\deg(i)}{8}$:

$$P = \begin{pmatrix} 2/8 \\ 2/8 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,375 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** : la somme vaut 1 ✓.
- **Vérification sur la première ligne** de TP : le marcheur arrive en A depuis B (probabilité $\frac{1}{2}$) ou depuis C (probabilité $\frac{1}{3}$), donc
- $\frac{1}{2} \times 0,25 + \frac{1}{3} \times 0,375 = 0,125 + 0,125 = 0,25$ ✓.
- **Interprétation** : C est le sommet le plus visité (le mieux connecté), D le moins visité. Le temps passé est **proportionnel au degré**.

Réponse. a) degrés 2, 2, 3, 1 et 4 arêtes · b) $P = (0,25; 0,25; 0,375; 0,125)$.

Correction de l'exercice 8 - Navigation sur un site

a) Chaque **colonne** décrit les départs depuis une page :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Colonne 1 (depuis la page 1) : 0, 0, 5, 0, 5 ✓. Colonne 3 (depuis la page 3) : 1, 0, 0 ✓.
- Le graphe est **orienté** : depuis 3 on ne peut aller qu'en 1, alors que depuis 1 on ne peut pas aller en 1.

b) $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

— $P_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,5 + 1 \times 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \times 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix}$.

- **Après deux clics** : le visiteur est sur la page 1 avec la probabilité 0,75, sur la page 3 avec la probabilité 0,25, et **jamais** sur la page 2 (aucun chemin de longueur 2 n'y mène depuis 1).
- Contrôle : $0,75 + 0,25 = 1$ ✓.

Réponse. a) T ci-dessus · b) page 1 avec 0,75, page 3 avec 0,25.

Correction de l'exercice 9 - La page la plus visitée

On résout $TP = P$ avec $x + y + z = 1$:

$$\begin{cases} 0,5y + z = x \\ 0,5x = y \\ 0,5x + 0,5y = z \end{cases}$$

- De la deuxième : $y = 0,5x$.
- De la troisième : $z = 0,5x + 0,25x = 0,75x$.
- On reporte dans la condition de somme : $x + 0,5x + 0,75x = 1$, soit $2,25x = 1$.
- $x = \frac{1}{2,25} = \frac{4}{9}$, donc $y = \frac{2}{9}$ et $z = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$P = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/9 \\ 3/9 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** de la première ligne : $0,5 \times \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$ ✓.
- **Conclusion** : la page 1 est la plus consultée ($\approx 44\%$ du trafic), devant la page 3 (33%) et la page 2 (22%).
- **Le principe du PageRank** : c'est exactement ainsi que les moteurs de recherche classaient à l'origine les pages — la probabilité invariante d'un surfeur aléatoire mesure l'importance d'une page.

Réponse. $P = \left(\frac{4}{9}; \frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right)$: la page 1 est la plus visitée.

Correction de l'exercice 10 - Une marche avec un piège

a) La salle 3 est **absorbante** : sa colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

— Colonnes de somme 1 ✓.

b) On part de $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$: une chance sur deux d'être déjà piégé.

— $P_2 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

— $P_3 = \begin{pmatrix} 0,125 + 0,125 \\ 0,125 \\ 0,125 + 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,125 \\ 0,625 \end{pmatrix}$.

— **La probabilité d'être piégé après trois étapes est 0,625.**

— **Comportement à long terme** : la probabilité de piège **augmente** à chaque étape et tend vers 1. Le marcheur finit presque sûrement dans la salle 3 — c'est le propre d'un état absorbant accessible.

Réponse. a) T ci-dessus · b) 0,625.

Correction de l'exercice 11 - Deux issues absorbantes

a) En partant de $k = 2$, la probabilité de **gagner** (atteindre 4) vaut $\frac{2}{4} = 0,5$.

— La probabilité d'être **ruiné** est donc $1 - 0,5 = 0,5$.

— **C'est cohérent avec la symétrie** : partant du milieu, avec des chances égales à chaque partie, les deux issues sont équiprobables ✓.

b) En partant de $k = 1$: probabilité de gagner $\frac{1}{4} = 0,25$, donc probabilité de ruine 0,75.

— **La leçon du modèle** : plus on part avec peu, plus la ruine est probable — et cela même si chaque partie est parfaitement équitable.

— **Le cas du casino** : dans la réalité, la probabilité de gagner une partie est légèrement inférieure à 0,5, ce qui rend la ruine quasi certaine sur un grand nombre de parties.

— **Vérification du modèle** : la marche a **deux** états absorbants (0 et 4) ; les probabilités d'y aboutir se somment bien à 1 pour chaque point de départ ✓.

Réponse. a) 0,5 · b) 0,75.

Correction de l'exercice 12 - Lire une puissance

a) Le coefficient de la ligne 2, colonne 1 est la probabilité d'être en B après trois étapes sachant qu'on est parti de A .

— Il vaut $0,375 = \frac{3}{8}$.

- **Vérification par dénombrement** : il y a $2^3 = 8$ trajets équiprobables de trois pas depuis A . Ceux qui finissent en B sont $A - B - A - B$, $A - B - C - B$, $A - C - A - B$: trois trajets, d'où $\frac{3}{8}$ ✓.
- b) Les coefficients diagonaux valent $0,25 = \frac{2}{8}$: il n'y a que **deux** trajets de trois pas ramenant à son point de départ ($A - B - C - A$ et $A - C - B - A$).
- **L'explication** : revenir exactement au départ en trois pas impose de faire le tour complet du triangle. Terminer sur un autre sommet laisse plus de possibilités.
- **À long terme** : les coefficients de T^n tendent tous vers $\frac{1}{3}$, la distribution invariante — la mémoire du point de départ s'efface. Ici, à la troisième étape, l'écart entre $0,25$ et $0,375$ est déjà faible.

Réponse. a) probabilité d'être en B après 3 pas en partant de A , soit $\frac{3}{8}$. b) seuls deux trajets sur huit ramènent au départ.

Correction de l'exercice 13 - Un graphe orienté sans retour

a) On lit les colonnes :

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

- Colonne 1 : $0,6$ de rester en E_1 , $0,4$ de passer en E_2 ✓. Colonne 3 : E_3 est **absorbant**.
- b) On résout $TP = P$ avec $x + y + z = 1$:
 - Ligne 1 : $0,6x = x$, donc $0,4x = 0$ et $x = 0$.
 - Ligne 2 : $0,4x + 0,4y = y$, avec $x = 0$: $0,6y = 0$, donc $y = 0$.
 - Il reste $z = 1$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Interprétation** : toute la masse de probabilité finit dans l'état absorbant E_3 . Le processus se termine **presque sûrement**.
- **Différence avec les marches précédentes** : ici la distribution invariante est unique mais « dégénérée ». Elle ne renseigne pas sur la vitesse — pour cela, il faut calculer la durée moyenne, qui vaut ici $\frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,6} \approx 4,2$ étapes.

Réponse. a) T ci-dessus · b) $P = (0; 0; 1)$: tout finit en E_3 .

Correction de l'exercice 14 - Le marcheur sur un carré

- a) Chaque sommet est de degré 2, et le carré a 4 arêtes.
 - La formule donne $p_i = \frac{2}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$ pour chaque sommet.
 - La distribution invariante est donc l'**équirépartition** $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$, ce qui est cohérent avec la symétrie de la figure.
- b) **Non**. Le carré est un graphe **biparti** : les groupes sont $\{A; C\}$ et $\{B; D\}$, et toute arête relie un groupe à l'autre.
 - En partant de A , le marcheur est dans $\{B; D\}$ après un nombre impair de pas, et dans $\{A; C\}$ après un nombre pair.

- La distribution oscille donc entre $(0,5; 0; 0,5; 0)$ et $(0; 0,5; 0; 0,5)$: elle ne converge pas.
- **Ce qui reste vrai** : la **moyenne temporelle** vaut bien $\frac{1}{4}$ par sommet. Sur un grand nombre de pas, le marcheur visite les quatre sommets aussi souvent.
- **Le critère à retenir** : convergence dès que le graphe est connexe **et** contient un cycle de longueur impaire (ce qui exclut les graphes bipartis).

Réponse. a) équirépartition $\frac{1}{4}$ par sommet · b) non : le carré est biparti, la marche oscille.

Correction de l'exercice 15 - Bilan : une marche complète

a) Degrés : $\deg(A) = 2$, $\deg(B) = 2$, $\deg(C) = 3$, $\deg(D) = 1$.

- Depuis A : vers B ou C , probabilité $\frac{1}{2}$ chacune. Depuis C : vers A , B ou D , probabilité $\frac{1}{3}$ chacune. Depuis D : vers C , probabilité 1.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Colonnes de somme 1 ✓.

b) Le graphe a 4 arêtes, donc $p_i = \frac{\deg(i)}{8}$:

$$P = \left(\frac{2}{8}; \frac{2}{8}; \frac{3}{8}; \frac{1}{8} \right) = (0,25; 0,25; 0,375; 0,125)$$

- **Vérification ligne par ligne** de $TP = P$:
- Ligne A : $\frac{1}{2} \times 0,25 + \frac{1}{3} \times 0,375 = 0,125 + 0,125 = 0,25$ ✓.
- Ligne C : $\frac{1}{2} \times 0,25 + \frac{1}{2} \times 0,25 + 1 \times 0,125 = 0,125 + 0,125 + 0,125 = 0,375$ ✓.
- Ligne D : $\frac{1}{3} \times 0,375 = 0,125$ ✓.

c) **Oui**, la marche converge.

- Le graphe est **connexe** (tous les sommets sont reliés par un chemin) et contient un **cycle de longueur impaire**, le triangle ABC : il n'est donc pas biparti.
- P_n converge vers P , quel que soit le point de départ.
- **Interprétation** : à long terme, le marcheur passe 37,5 % de son temps en C , le sommet le mieux connecté, et seulement 12,5 % en D , le sommet au bout de l'antenne.

Réponse. a) T ci-dessus · b) $(0,25; 0,25; 0,375; 0,125)$ · c) oui : connexe et non biparti (triangle ABC).