Plaquette 2 – Matrice d'adjacence, degrés et comptage de chemins

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire et théorèmes.

— Un **graphe** est formé de **sommets** et d'**arêtes** (non orienté) ou d'**arcs** (orienté). Son **ordre** est son nombre de sommets.

— **Degré** d'un sommet : nombre d'arêtes qui y aboutissent. Dans un graphe orienté, on distingue le **degré entrant** et le **degré sortant**.

— **Lemme des poignées de main** : la somme des degrés vaut **deux fois** le nombre d'arêtes, car chaque arête est comptée à ses deux extrémités.

$$\sum_{\text{sommets } s} \deg(s) = 2 \times (\text{nombre d'arêtes})$$

— **Matrice d'adjacence** M : $m_{ij} = 1$ s'il existe une arête (ou un arc) de i vers j, et 0 sinon. Elle est **symétrique** si et seulement si le graphe est non orienté, et sa diagonale est nulle s'il n'y a pas de boucle.

— **Théorème des chemins** : le coefficient $(i\,;j)$ de M^n est le **nombre de chemins de longueur exactement** n allant de i à j.

— **Chemins fermés** : les coefficients diagonaux de M^2 donnent les degrés ; ceux de M^3 comptent les triangles passant par chaque sommet. Le nombre total de triangles vaut $\frac{1}{6}$ de la somme de ces coefficients diagonaux.

— **Connexité** : un graphe d'ordre p est connexe si tous les coefficients de $I + M + M^2 + \cdots + M^{p-1}$ sont strictement positifs.

Correction de l'exercice 1 – Du graphe à la matrice

a) L'**ordre** est le nombre de sommets : 4.

Sommet	A	B	C	D
Voisins	B, C	A, C	A, B, D	C
Degré	2	2	3	1

— Somme des degrés : $2 + 2 + 3 + 1 = 8$.

— **Lemme des poignées de main** : le nombre d'arêtes vaut $\frac{8}{2} = 4$ ✓, ce que confirme la liste AB, AC, BC, CD.

b) On place un 1 à chaque couple de sommets reliés :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— La matrice est **symétrique** (le graphe n'est pas orienté) et sa diagonale est nulle (pas de boucle) ✓.

— **Contrôle** : la somme de chaque ligne redonne le degré du sommet : 2, 2, 3, 1 ✓.

Réponse. a) ordre 4, degrés 2, 2, 3, 1, quatre arêtes · b) M symétrique à diagonale nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – De la matrice au graphe

a) La matrice est **symétrique** : le graphe n'est pas orienté.

— Tous les coefficients hors diagonale valent 1 : **chaque paire de sommets est reliée**.

— Les arêtes sont donc AB, AC, AD, BC, BD, CD.

b) Chaque sommet est de degré 3 (somme de sa ligne).

— Somme des degrés : $4 \times 3 = 12$, donc le nombre d'arêtes vaut $\frac{12}{2} = 6$ ✓.

— Un graphe où **tous** les sommets sont reliés deux à deux s'appelle un **graphe complet** ; celui d'ordre 4 se note K_4.

— **Formule générale** : K_p possède $\frac{p(p-1)}{2}$ arêtes, ici $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ ✓ — c'est le nombre de paires de sommets.

Réponse. a) non orienté, toutes les paires sont reliées · b) 6 arêtes : c'est le graphe complet K_4.

Correction de l'exercice 3 – Chemins de longueur 2

a) On calcule ligne contre colonne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Détail du coefficient $(1\,;1)$: ligne 1 de M contre colonne 1 : $0 + 1 + 1 + 0 = 2$.

— Détail du coefficient $(3\,;3)$: $1 + 1 + 0 + 1 = 3$.

b) **Coefficient** $(1\,;4) = 1$: il existe **un seul** chemin de longueur 2 de A à D.

— C'est le chemin $A - C - D$ ✓ (il n'y en a pas d'autre, D n'ayant que C pour voisin).

Coefficient $(3\,;3) = 3$: il existe 3 chemins de longueur 2 allant de C à C.

— Ce sont les allers-retours $C - A - C$, $C - B - C$ et $C - D - C$.

— **Règle générale** : le coefficient diagonal de M^2 au sommet i est exactement le **degré** de i — ici $\deg(C) = 3$ ✓.

Réponse. a) M^2 ci-dessus · b) un chemin $A - C - D$; 3 allers-retours depuis C, soit son degré.

Correction de l'exercice 4 – Chemins de longueur 3

a) Le coefficient $(1\,;3)$ vaut 4 : il y a **quatre** chemins de longueur 3 de A à C.

— $A - B - A - C$; $A - C - A - C$; $A - C - B - C$; $A - B - C - C$? Cette dernière n'existe pas (C n'a pas de boucle). Reprenons la liste complète :

— $A - B - A - C$, $A - C - A - C$, $A - C - B - C$, $A - C - D - C$.

— **Vérification** : ces quatre chemins utilisent bien trois arêtes chacun ✓.

— On remarque qu'un « chemin » au sens de ce théorème peut **repasser** par un sommet ou une arête : c'est une **marche**, pas un trajet simple.

b) Le coefficient $(4\,;4)$ compte les chemins de longueur 3 allant de D à D.

— Il vaut 0 : il est **impossible** de revenir en D en exactement trois pas.

— **Pourquoi** : D n'a qu'un seul voisin, C. Un retour en D demande un nombre **pair** de pas ($D - C - D$, puis 4, 6…). Trois étant impair, il n'y a aucun chemin.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) quatre : $A-B-A-C$, $A-C-A-C$, $A-C-B-C$, $A-C-D-C$ · b) impossible de revenir en D en un nombre impair de pas.

Correction de l'exercice 5 – Compter les triangles

a) La somme des coefficients **diagonaux** de M^3 vaut $2+2+2+0=6$.

— Chaque triangle est compté 6 fois : une fois par sommet de départ (3 choix) et une fois par sens de parcours (2 choix).

— Nombre de triangles : $\dfrac{6}{6}=1$.

— **Vérification sur le dessin** : le seul triangle est ABC ✓ ; le sommet D n'appartient à aucun, d'où son coefficient diagonal nul.

b) Pour K_4, la somme des coefficients diagonaux vaut $4\times 6=24$.

— Nombre de triangles : $\dfrac{24}{6}=4$.

— **Vérification par le dénombrement** : un triangle correspond au choix de 3 sommets parmi 4, soit $\binom{4}{3}=4$ ✓ — dans un graphe complet, tout triplet de sommets forme un triangle.

Réponse. a) un seul triangle (ABC) · b) quatre triangles.

Correction de l'exercice 6 – Un graphe orienté

a) On place un 1 en ligne i, colonne j pour chaque arc $i\to j$:

$$O=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

— La matrice **n'est pas symétrique** : c'est la signature d'un graphe orienté. Par exemple $A\to B$ existe, mais pas $B\to A$.

b) Le degré **sortant** se lit sur les lignes, le degré **entrant** sur les colonnes.

Sommet	A	B	C	D
Degré sortant	2	1	1	1
Degré entrant	1	1	2	1

— **Contrôle** : la somme des degrés sortants (5) égale la somme des degrés entrants (5) et vaut le nombre d'arcs ✓.

— **Attention** : ici la somme des degrés ne se divise pas par 2 — le lemme des poignées de main ne concerne que les graphes **non orientés**.

Réponse. a) O non symétrique · b) sortants $2,1,1,1$; entrants $1,1,2,1$.

Correction de l'exercice 7 – Chemins dans un graphe orienté

a) Le coefficient $(1\,;4)$ de O^2 vaut 1 : il existe **un** chemin de longueur 2 de A à D.

— C'est le chemin $A\to C\to D$ ✓ — en respectant le sens des arcs, ce qui est essentiel dans un graphe orienté.

— En revanche le coefficient $(2\,;1)$ de O^2 vaut 0 : on ne peut pas aller de B à A en deux pas.

b) Le coefficient $(1\,;1)$ de O^3 vaut 1 : il existe **un circuit de longueur 3** partant de A et y

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

revenant.

— C'est le circuit $A \to C \to D \to A$ ✓.
— **Lecture d'ensemble** : la présence d'un coefficient diagonal non nul dans une puissance de O signale un **circuit**, information capitale dans un réseau (boucle de dépendances, cycle dans un ordonnancement).

Réponse. a) oui : $A \to C \to D$ · b) il existe un circuit $A \to C \to D \to A$.

Correction de l'exercice 8 – Tester la connexité

Le critère. Un graphe d'ordre p est connexe lorsque tous les coefficients de

$$I + M + M^2 + \cdots + M^{p-1}$$

sont strictement positifs : cela signifie que **toute paire de sommets** est reliée par un chemin de longueur au plus $p - 1$.

— Ici $p = 4$, mais la somme $I + M + M^2$ suffit déjà : tous ses coefficients sont ≥ 1.
— Le graphe est donc **connexe** : on peut aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.

Lecture détaillée.

— Le coefficient $(1\,;4) = 1$ vient de M^2 : A et D sont reliés par un chemin de longueur 2, pas par une arête.
— **Pourquoi s'arrêter à** $p - 1$: si deux sommets sont reliés, ils le sont par un chemin qui ne repasse jamais deux fois par le même sommet, donc de longueur au plus $p - 1$.
— **Le rôle de** I : il rend la diagonale positive, puisqu'un sommet est toujours relié à lui-même par le chemin vide.

Réponse. Oui : tous les coefficients de $I + M + M^2$ sont strictement positifs.

Correction de l'exercice 9 – Un cycle à cinq sommets

a) Le coefficient $(1\,;2)$ de C^3 vaut 3 : il existe **trois** chemins de longueur 3 de S_1 à S_2.

— Les voici : $S_1 - S_2 - S_1 - S_2$, $S_1 - S_5 - S_1 - S_2$, $S_1 - S_2 - S_3 - S_2$.
— **Contrôle de cohérence** : chaque chemin comporte bien trois arêtes ✓.

b) Les coefficients **diagonaux** de C^3 sont tous nuls.

— Aucun sommet n'appartient à un circuit de longueur 3 : le graphe **ne contient aucun triangle**.
— **C'est logique** : dans un cycle de longueur 5, les seuls circuits ont pour longueur 5 (ou des multiples liés aux allers-retours). Trois sommets consécutifs S_1, S_2, S_3 ne sont pas reliés en triangle puisque S_1 et S_3 ne sont pas voisins ✓.
— **Application** : cette lecture des coefficients diagonaux est la méthode standard pour détecter des triangles dans un réseau social (trois personnes toutes amies entre elles).

Réponse. a) trois chemins · b) non : les coefficients diagonaux de C^3 sont nuls.

Correction de l'exercice 10 – Un réseau routier

a) On additionne les degrés (somme de chaque ligne) :

Ville	1	2	3	4	5
Degré	2	3	4	3	2

— Somme des degrés : $2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 14$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Nombre de routes : $\frac{14}{2} = 7$ ✓ (lemme des poignées de main).

b) Le coefficient $(1\,;4)$ de G^2 compte les trajets de la ville 1 à la ville 4 passant par **exactement une** ville intermédiaire.

— Il vaut 2 : les deux itinéraires sont $1-2-4$ et $1-3-4$.
— **Vérification sur la matrice** : les voisins de la ville 1 sont 2 et 3, et ces deux villes sont toutes deux reliées à la ville 4 ✓.
— **Application concrète** : ce calcul donne le nombre d'itinéraires avec une seule correspondance — exactement ce que cherche un logiciel de recherche d'itinéraires.

Réponse. a) 7 routes · b) deux itinéraires avec une étape : $1-2-4$ et $1-3-4$.

Correction de l'exercice 11 – Amis communs

a) Le coefficient $(i\,;j)$ de R^2 compte les chemins de longueur 2 de i à j, c'est-à-dire les personnes k telles que i soit ami avec k **et** k ami avec j.

— C'est donc le nombre d'**amis communs** à i et j.
— **C'est exactement le calcul** que font les réseaux sociaux pour suggérer « vous avez 7 amis en commun ».

b) Pour $i = j$, le coefficient compte les chemins $i-k-i$, c'est-à-dire les allers-retours vers chacun des amis de i.

— Il y en a autant que d'amis : le coefficient diagonal vaut le **degré** de i, c'est-à-dire son **nombre d'amis**.
— **Conséquence** : la trace de R^2 (somme des coefficients diagonaux) vaut la somme des degrés, soit **deux fois** le nombre d'amitiés dans le réseau.
— **Pour aller plus loin** : la trace de R^3 divisée par 6 donne le nombre de **triangles d'amitié**, un indicateur très utilisé pour mesurer la « densité » d'un réseau.

Réponse. a) le nombre d'amis communs à i et j · b) le nombre d'amis de i (son degré).

Correction de l'exercice 12 – Un graphe biparti

a) Avec l'ordre A, B, C, D :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On répartit les sommets en deux groupes : $\{A\,;C\}$ et $\{B\,;D\}$.

— **Observation clé** : toute arête relie un sommet du premier groupe à un sommet du second. Il n'y a aucune arête à l'intérieur d'un groupe.
— À chaque pas, on **change donc de groupe**.
— Partant de A (groupe 1), on est dans le groupe 2 après 1 pas, dans le groupe 1 après 2 pas, et plus généralement dans le groupe 1 après un nombre **pair** de pas.
— Pour atteindre C, qui est dans le groupe 1, il faut donc un nombre **pair** de pas : aucun chemin de longueur impaire ne convient.

Vérification par le calcul. $Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$: le coefficient $(1\,;3)$ est bien nul ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Un graphe dont les sommets se répartissent ainsi en deux groupes sans arête interne s'appelle un graphe **biparti**. Il ne contient jamais de cycle de longueur impaire — donc jamais de triangle.

Réponse. a) Q ci-dessus · b) le graphe est biparti : chaque pas change de groupe, il faut un nombre pair de pas.

Correction de l'exercice 13 – Robustesse d'un réseau

a) On supprime le sommet C et toutes les arêtes qui y aboutissent. Il reste les sommets A, B, D et la seule arête AB.

— Le sommet D n'a plus aucun voisin : il est **isolé**.

— Le réseau **n'est plus connexe** : D ne peut plus communiquer avec personne.

b) Le point faible est le serveur C.

— C'est un **point d'articulation** : sa suppression casse le réseau en deux morceaux.

— D n'a d'ailleurs qu'une seule liaison (degré 1) : il dépend entièrement de C.

— **La parade classique** : ajouter une arête AD ou BD. Chaque sommet aurait alors au moins deux voisins, et la suppression d'un serveur quelconque laisserait le réseau connexe.

— **Vérification après ajout de** BD : en retirant C, il resterait les arêtes AB et BD, reliant bien les trois serveurs ✓.

Réponse. a) non : D devient isolé · b) C est un point d'articulation ; ajouter une liaison vers D corrige le défaut.

Correction de l'exercice 14 – Compter sans matrice

a) Chaque arête correspond à une **paire** de sommets :

— $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ arêtes.

— Contrôle par les degrés : chaque sommet est de degré 4, donc la somme vaut 20, et $\dfrac{20}{2} = 10$ ✓.

b) Un chemin de longueur 2 de A à B s'écrit $A - k - B$, où k est un sommet relié aux deux.

— Dans K_5, **tous** les autres sommets conviennent : il y en a $5 - 2 = 3$.

— Le coefficient correspondant de la matrice M^2 vaut donc 3.

c) Un triangle correspond au choix de trois sommets, tous reliés entre eux :

— $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$ triangles.

— **Contrôle par la trace** : chaque coefficient diagonal de M^3 vaudrait 12 (nombre de circuits de longueur 3 par sommet), soit une trace de 60, et $\dfrac{60}{6} = 10$ ✓.

— **La leçon** : dans un graphe très régulier, le **dénombrement** est plus rapide que le calcul matriciel. Les deux doivent donner le même résultat.

Réponse. a) 10 arêtes · b) 3 chemins · c) 10 triangles.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : lire un graphe de bout en bout

a) Chaque 1 en ligne i, colonne j correspond à l'arc $i \to j$:

— Arcs : $1 \to 2$, $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 3$. Il y en a cinq.

— Degrés entrants (somme des **colonnes**) : sommet 1 : 1 ; sommet 2 : 1 ; sommet 3 : 2 ; sommet 4 : 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Contrôle : $1 + 1 + 2 + 1 = 5$, le nombre d'arcs ✓.

b) Les coefficients diagonaux non nuls de D^3 sont en positions 1, 2 et 3.

— Le coefficient $(1\,;1) = 1$ donne le circuit $1 \to 2 \to 3 \to 1$ ✓.

— Celui en $(3\,;3)$ correspond au même circuit vu depuis le sommet 3 : $3 \to 1 \to 2 \to 3$.

c) On suit les arcs depuis le sommet 1 :

— $1 \to 2$: le sommet 2 est atteint en un pas.

— $2 \to 3$ et $2 \to 4$: les sommets 3 et 4 sont atteints en deux pas.

— **Oui**, tous les sommets sont accessibles depuis 1 : le graphe est **fortement connexe** à partir de ce sommet.

— **Vérification matricielle** : la première ligne de $D + D^2 + D^3$ n'a que des coefficients strictement positifs ✓.

Réponse. a) cinq arcs, degrés entrants $1, 1, 2, 1$ · b) $1 \to 2 \to 3 \to 1$ · c) oui, en au plus deux pas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).