

Plaquette 2 - Matrice d'adjacence, degrés et comptage de chemins

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire et théorèmes.

- Un **graphe** est formé de **sommets** et d'**arêtes** (non orienté) ou d'**arcs** (orienté). Son **ordre** est son nombre de sommets.
- **Degré** d'un sommet : nombre d'arêtes qui y aboutissent. Dans un graphe orienté, on distingue le **degré entrant** et le **degré sortant**.
- **Lemme des poignées de main** : la somme des degrés vaut **deux fois** le nombre d'arêtes, car chaque arête est comptée à ses deux extrémités.
- **Matrice d'adjacence** M : $m_{ij} = 1$ s'il existe une arête (ou un arc) de i vers j , et 0 sinon. Elle est **symétrique** si et seulement si le graphe est non orienté, et sa diagonale est nulle s'il n'y a pas de boucle.
- **Théorème des chemins** : le coefficient $(i; j)$ de M^n est le **nombre de chemins de longueur exactement n** allant de i à j .
- **Chemins fermés** : les coefficients diagonaux de M^2 donnent les degrés ; ceux de M^3 comptent les triangles passant par chaque sommet. Le nombre total de triangles vaut $\frac{1}{6}$ de la somme de ces coefficients diagonaux.
- **Connexité** : un graphe d'ordre p est connexe si tous les coefficients de $I + M + M^2 + \dots + M^{p-1}$ sont strictement positifs.

Correction de l'exercice 1 - Du graphe à la matrice

a) L'**ordre** est le nombre de sommets : 4.

Sommet	A	B	C	D
Voisins	B, C	A, C	A, B, D	C
Degré	2	2	3	1

- Somme des degrés : $2 + 2 + 3 + 1 = 8$.
- **Lemme des poignées de main** : le nombre d'arêtes vaut $\frac{8}{2} = 4$ ✓, ce que confirme la liste AB, AC, BC, CD.

b) On place un 1 à chaque couple de sommets reliés :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice est **symétrique** (le graphe n'est pas orienté) et sa diagonale est nulle (pas de boucle) ✓.
- **Contrôle** : la somme de chaque ligne redonne le degré du sommet : 2, 2, 3, 1 ✓.

Réponse. a) ordre 4, degrés 2, 2, 3, 1, quatre arêtes · b) M symétrique à diagonale nulle.

Correction de l'exercice 2 - De la matrice au graphe

a) La matrice est **symétrique** : le graphe n'est pas orienté.

- Tous les coefficients hors diagonale valent 1 : **chaque paire de sommets est reliée**.
- Les arêtes sont donc AB, AC, AD, BC, BD, CD .

b) Chaque sommet est de degré 3 (somme de sa ligne).

- Somme des degrés : $4 \times 3 = 12$, donc le nombre d'arêtes vaut $\frac{12}{2} = 6 \checkmark$.
- Un graphe où **tous** les sommets sont reliés deux à deux s'appelle un **graphe complet** ; celui d'ordre 4 se note K_4 .
- **Formule générale** : K_p possède $\frac{p(p-1)}{2}$ arêtes, ici $\frac{4 \times 3}{2} = 6 \checkmark$ — c'est le nombre de paires de sommets.

Réponse. a) non orienté, toutes les paires sont reliées · b) 6 arêtes : c'est le graphe complet K_4 .

Correction de l'exercice 3 - Chemins de longueur 2

a) On calcule ligne contre colonne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Détail du coefficient (1 ; 1) : ligne 1 de M contre colonne 1 : $0 + 1 + 1 + 0 = 2$.
- Détail du coefficient (3 ; 3) : $1 + 1 + 0 + 1 = 3$.

b) **Coefficient** (1 ; 4) = 1 : il existe **un seul** chemin de longueur 2 de A à D .

- C'est le chemin $A - C - D \checkmark$ (il n'y en a pas d'autre, D n'ayant que C pour voisin).

Coefficient (3 ; 3) = 3 : il existe 3 chemins de longueur 2 allant de C à C .

- Ce sont les allers-retours $C - A - C$, $C - B - C$ et $C - D - C$.
- **Règle générale** : le coefficient diagonal de M^2 au sommet i est exactement le **degré** de i — ici $\deg(C) = 3 \checkmark$.

Réponse. a) M^2 ci-dessus · b) un chemin $A - C - D$; 3 allers-retours depuis C , soit son degré.

Correction de l'exercice 4 - Chemins de longueur 3

a) Le coefficient (1 ; 3) vaut 4 : il y a **quatre** chemins de longueur 3 de A à C .

- $A - B - A - C$; $A - C - A - C$; $A - C - B - C$; $A - B - C - C$? Cette dernière n'existe pas (C n'a pas de boucle). Reprenons la liste complète :

- $A - B - A - C$, $A - C - A - C$, $A - C - B - C$, $A - C - D - C$.

- **Vérification** : ces quatre chemins utilisent bien trois arêtes chacun $\checkmark$.

- On remarque qu'un « chemin » au sens de ce théorème peut **repasser** par un sommet ou une arête : c'est une **marche**, pas un trajet simple.

b) Le coefficient (4 ; 4) compte les chemins de longueur 3 allant de D à D .

- Il vaut 0 : il est **impossible** de revenir en D en exactement trois pas.
- **Pourquoi** : D n'a qu'un seul voisin, C . Un retour en D demande un nombre **pair** de pas ($D - C - D$, puis 4, 6...). Trois étant impair, il n'y a aucun chemin.

Réponse. a) quatre : $A - B - A - C$, $A - C - A - C$, $A - C - B - C$, $A - C - D - C$ · b) impossible de revenir en D en un nombre impair de pas.

Correction de l'exercice 5 – Compter les triangles

- a) La somme des coefficients **diagonaux** de M^3 vaut $2 + 2 + 2 + 0 = 6$.
- Chaque triangle est compté 6 fois : une fois par sommet de départ (3 choix) et une fois par sens de parcours (2 choix).
 - Nombre de triangles : $\frac{6}{6} = 1$.
 - **Vérification sur le dessin** : le seul triangle est ABC ✓ ; le sommet D n'appartient à aucun, d'où son coefficient diagonal nul.
- b) Pour K_4 , la somme des coefficients diagonaux vaut $4 \times 6 = 24$.
- Nombre de triangles : $\frac{24}{6} = 4$.
 - **Vérification par le dénombrement** : un triangle correspond au choix de 3 sommets parmi 4, soit $\binom{4}{3} = 4$ ✓ — dans un graphe complet, tout triplet de sommets forme un triangle.

Réponse. a) un seul triangle (ABC) · b) quatre triangles.

Correction de l'exercice 6 – Un graphe orienté

a) On place un 1 en ligne i , colonne j pour chaque arc $i \rightarrow j$:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice **n'est pas symétrique** : c'est la signature d'un graphe orienté. Par exemple $A \rightarrow B$ existe, mais pas $B \rightarrow A$.
- b) Le degré **sortant** se lit sur les lignes, le degré **entrant** sur les colonnes.

Sommet	A	B	C	D
Degré sortant	2	1	1	1
Degré entrant	1	1	2	1

- **Contrôle** : la somme des degrés sortants (5) égale la somme des degrés entrants (5) et vaut le nombre d'arcs ✓.
- **Attention** : ici la somme des degrés ne se divise pas par 2 — le lemme des poignées de main ne concerne que les graphes **non orientés**.

Réponse. a) O non symétrique · b) sortants 2, 1, 1, 1 ; entrants 1, 1, 2, 1.

Correction de l'exercice 7 – Chemins dans un graphe orienté

- a) Le coefficient $(1 ; 4)$ de O^2 vaut 1 : il existe **un** chemin de longueur 2 de A à D .
- C'est le chemin $A \rightarrow C \rightarrow D$ ✓ — en respectant le sens des arcs, ce qui est essentiel dans un graphe orienté.
 - En revanche le coefficient $(2 ; 1)$ de O^2 vaut 0 : on ne peut pas aller de B à A en deux pas.
- b) Le coefficient $(1 ; 1)$ de O^3 vaut 1 : il existe **un circuit de longueur 3** partant de A et y

revenant.

- C'est le circuit $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ ✓.
- **Lecture d'ensemble** : la présence d'un coefficient diagonal non nul dans une puissance de O signale un **circuit**, information capitale dans un réseau (boucle de dépendances, cycle dans un ordonnancement).

Réponse. a) oui : $A \rightarrow C \rightarrow D$ · b) il existe un circuit $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$.

Correction de l'exercice 8 - Tester la connexité

Le critère. Un graphe d'ordre p est connexe lorsque tous les coefficients de

$$I + M + M^2 + \dots + M^{p-1}$$

sont strictement positifs : cela signifie que **toute paire de sommets** est reliée par un chemin de longueur au plus $p - 1$.

- Ici $p = 4$, mais la somme $I + M + M^2$ suffit déjà : tous ses coefficients sont ≥ 1 .
- Le graphe est donc **connexe** : on peut aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.

Lecture détaillée.

- Le coefficient $(1 ; 4) = 1$ vient de M^2 : A et D sont reliés par un chemin de longueur 2, pas par une arête.
- **Pourquoi s'arrêter à $p - 1$** : si deux sommets sont reliés, ils le sont par un chemin qui ne repasse jamais deux fois par le même sommet, donc de longueur au plus $p - 1$.
- **Le rôle de I** : il rend la diagonale positive, puisqu'un sommet est toujours relié à lui-même par le chemin vide.

Réponse. Oui : tous les coefficients de $I + M + M^2$ sont strictement positifs.

Correction de l'exercice 9 - Un cycle à cinq sommets

a) Le coefficient $(1 ; 2)$ de C^3 vaut 3 : il existe **trois** chemins de longueur 3 de S_1 à S_2 .

- Les voici : $S_1 - S_2 - S_1 - S_2$, $S_1 - S_5 - S_1 - S_2$, $S_1 - S_2 - S_3 - S_2$.
- **Contrôle de cohérence** : chaque chemin comporte bien trois arêtes ✓.

b) Les coefficients **diagonaux** de C^3 sont tous nuls.

- Aucun sommet n'appartient à un circuit de longueur 3 : le graphe **ne contient aucun triangle**.
- **C'est logique** : dans un cycle de longueur 5, les seuls circuits ont pour longueur 5 (ou des multiples liés aux allers-retours). Trois sommets consécutifs S_1, S_2, S_3 ne sont pas reliés en triangle puisque S_1 et S_3 ne sont pas voisins ✓.
- **Application** : cette lecture des coefficients diagonaux est la méthode standard pour détecter des triangles dans un réseau social (trois personnes toutes amies entre elles).

Réponse. a) trois chemins · b) non : les coefficients diagonaux de C^3 sont nuls.

Correction de l'exercice 10 - Un réseau routier

a) On additionne les degrés (somme de chaque ligne) :

Ville	1	2	3	4	5
Degré	2	3	4	3	2

- Somme des degrés : $2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 14$.

— Nombre de routes : $\frac{14}{2} = 7 \checkmark$ (lemme des poignées de main).

b) Le coefficient $(1; 4)$ de G^2 compte les trajets de la ville 1 à la ville 4 passant par **exactement une** ville intermédiaire.

— Il vaut 2 : les deux itinéraires sont $1 - 2 - 4$ et $1 - 3 - 4$.

— **Vérification sur la matrice** : les voisins de la ville 1 sont 2 et 3, et ces deux villes sont toutes deux reliées à la ville 4 $\checkmark$.

— **Application concrète** : ce calcul donne le nombre d'itinéraires avec une seule correspondance — exactement ce que cherche un logiciel de recherche d'itinéraires.

Réponse. a) 7 routes · b) deux itinéraires avec une étape : $1 - 2 - 4$ et $1 - 3 - 4$.

Correction de l'exercice 11 - Amis communs

a) Le coefficient $(i; j)$ de R^2 compte les chemins de longueur 2 de i à j , c'est-à-dire les personnes k telles que i soit ami avec k **et** k ami avec j .

— C'est donc le nombre d'**amis communs** à i et j .

— **C'est exactement le calcul** que font les réseaux sociaux pour suggérer « vous avez 7 amis en commun ».

b) Pour $i = j$, le coefficient compte les chemins $i - k - i$, c'est-à-dire les allers-retours vers chacun des amis de i .

— Il y en a autant que d'amis : le coefficient diagonal vaut le **degré** de i , c'est-à-dire son **nombre d'amis**.

— **Conséquence** : la trace de R^2 (somme des coefficients diagonaux) vaut la somme des degrés, soit **deux fois** le nombre d'amitiés dans le réseau.

— **Pour aller plus loin** : la trace de R^3 divisée par 6 donne le nombre de **triangles d'amitié**, un indicateur très utilisé pour mesurer la « densité » d'un réseau.

Réponse. a) le nombre d'amis communs à i et j · b) le nombre d'amis de i (son degré).

Correction de l'exercice 12 - Un graphe biparti

a) Avec l'ordre A, B, C, D :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On répartit les sommets en deux groupes : $\{A; C\}$ et $\{B; D\}$.

— **Observation clé** : toute arête relie un sommet du premier groupe à un sommet du second. Il n'y a aucune arête à l'intérieur d'un groupe.

— À chaque pas, on **change donc de groupe**.

— Partant de A (groupe 1), on est dans le groupe 2 après 1 pas, dans le groupe 1 après 2 pas, et plus généralement dans le groupe 1 après un nombre **pair** de pas.

— Pour atteindre C , qui est dans le groupe 1, il faut donc un nombre **pair** de pas : aucun chemin de longueur impaire ne convient.

Vérification par le calcul. $Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$: le coefficient $(1; 3)$ est bien nul $\checkmark$.

- Un graphe dont les sommets se répartissent ainsi en deux groupes sans arête interne s'appelle un graphe **biparti**. Il ne contient jamais de cycle de longueur impaire — donc jamais de triangle.

Réponse. a) Q ci-dessus · b) le graphe est biparti : chaque pas change de groupe, il faut un nombre pair de pas.

Correction de l'exercice 13 - Robustesse d'un réseau

a) On supprime le sommet C et toutes les arêtes qui y aboutissent. Il reste les sommets A , B , D et la seule arête AB .

- Le sommet D n'a plus aucun voisin : il est **isolé**.
- Le réseau **n'est plus connexe** : D ne peut plus communiquer avec personne.

b) Le point faible est le serveur C .

- C'est un **point d'articulation** : sa suppression casse le réseau en deux morceaux.
- D n'a d'ailleurs qu'une seule liaison (degré 1) : il dépend entièrement de C .
- **La parade classique** : ajouter une arête AD ou BD . Chaque sommet aurait alors au moins deux voisins, et la suppression d'un serveur quelconque laisserait le réseau connexe.
- **Vérification après ajout de BD** : en retirant C , il resterait les arêtes AB et BD , reliant bien les trois serveurs ✓.

Réponse. a) non : D devient isolé · b) C est un point d'articulation ; ajouter une liaison vers D corrige le défaut.

Correction de l'exercice 14 - Compter sans matrice

a) Chaque arête correspond à une **paire** de sommets :

- $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ arêtes.
- Contrôle par les degrés : chaque sommet est de degré 4, donc la somme vaut 20, et $\frac{20}{2} = 10$ ✓.

b) Un chemin de longueur 2 de A à B s'écrit $A - k - B$, où k est un sommet relié aux deux.

- Dans K_5 , **tous** les autres sommets conviennent : il y en a $5 - 2 = 3$.
- Le coefficient correspondant de la matrice M^2 vaut donc 3.

c) Un triangle correspond au choix de trois sommets, tous reliés entre eux :

- $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$ triangles.
- **Contrôle par la trace** : chaque coefficient diagonal de M^3 vaudrait 12 (nombre de circuits de longueur 3 par sommet), soit une trace de 60, et $\frac{60}{6} = 10$ ✓.
- **La leçon** : dans un graphe très régulier, le **dénombrement** est plus rapide que le calcul matriciel. Les deux doivent donner le même résultat.

Réponse. a) 10 arêtes · b) 3 chemins · c) 10 triangles.

Correction de l'exercice 15 - Bilan : lire un graphe de bout en bout

a) Chaque 1 en ligne i , colonne j correspond à l'arc $i \rightarrow j$:

- Arcs : $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 3$. Il y en a cinq.
- Degrés entrants (somme des **colonnes**) : sommet 1 : 1 ; sommet 2 : 1 ; sommet 3 : 2 ; sommet 4 : 1.

- Contrôle : $1 + 1 + 2 + 1 = 5$, le nombre d'arcs ✓.
 - b) Les coefficients diagonaux non nuls de D^3 sont en positions 1, 2 et 3.
 - Le coefficient $(1; 1) = 1$ donne le circuit $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ✓.
 - Celui en $(3; 3)$ correspond au même circuit vu depuis le sommet 3 : $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.
 - c) On suit les arcs depuis le sommet 1 :
 - $1 \rightarrow 2$: le sommet 2 est atteint en un pas.
 - $2 \rightarrow 3$ et $2 \rightarrow 4$: les sommets 3 et 4 sont atteints en deux pas.
 - **Oui**, tous les sommets sont accessibles depuis 1 : le graphe est **fortement connexe** à partir de ce sommet.
 - **Vérification matricielle** : la première ligne de $D + D^2 + D^3$ n'a que des coefficients strictement positifs ✓.
- Réponse.** a) cinq arcs, degrés entrants 1, 1, 2, 1 · b) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ · c) oui, en au plus deux pas.