# Plaquette 5 – Synthèse : réseaux, PageRank et modèles aléatoires

## Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Toute la boîte à outils du chapitre.**

- **Matrice d'adjacence** $M$ : $m_{ij} = 1$ s'il existe une arête (ou un arc) de $i$ vers $j$. Le coefficient $(i\,;j)$ de $M^n$ compte les **chemins de longueur** $n$ de $i$ vers $j$.
- **Degrés** : somme des lignes ; la somme des degrés vaut deux fois le nombre d'arêtes (graphe non orienté).
- **Connexité** : tous les coefficients de $I + M + \cdots + M^{p-1}$ sont strictement positifs, pour un graphe d'ordre $p$.
- **Marche aléatoire simple** : $t_{ij} = \dfrac{1}{\deg(j)}$ si $i$ et $j$ sont voisins. Distribution invariante : $p_i = \dfrac{\deg(i)}{2 \times \text{nombre d'arêtes}}$.
- **Graphe probabiliste** : $P_n = T^n P_0$ ; la distribution invariante vérifie $TP = P$ avec somme 1.
- **Cas à deux états** : $p_{n+1} = (1-a-b)p_n + b$, limite $\dfrac{b}{a+b}$, convergence dès que $|1-a-b| < 1$.

$$p_{n+1} = (1-a-b)\,p_n + b \qquad \lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{b}{a+b}$$

- **PageRank** : on modélise un internaute qui suit au hasard les liens d'une page ; la distribution invariante mesure l'**importance** de chaque page.
- **Le dernier geste, toujours** : traduire le résultat numérique en une phrase sur le réseau étudié.

## Correction de l'exercice 1 – Un réseau de métro

a) On compte les voisins de chaque station :

| **Station** | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 |

- Somme des degrés : $2+3+4+3+2 = 14$, donc $\dfrac{14}{2} = 7$ liaisons ✓ (on les recompte dans l'énoncé : il y en a bien sept).

b) La distribution invariante d'une marche aléatoire simple est proportionnelle aux degrés :

$$p_i = \frac{\deg(i)}{2 \times 7} = \frac{\deg(i)}{14}$$

| **Station** | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Proportion | $\frac{2}{14}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{14}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{2}{14}$ |
| Environ | 14,3 % | 21,4 % | 28,6 % | 21,4 % | 14,3 % |

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : la somme vaut $\frac{14}{14} = 1$ ✓.

— **Interprétation** : la station $S_3$, la mieux connectée, concentre près de 29 % du trafic. C'est exactement le raisonnement qui justifie de dimensionner une station de correspondance plus grande que les autres.

**Réponse.** a) degrés $2, 3, 4, 3, 2$ et 7 liaisons · b) proportions $\frac{\deg(i)}{14}$, soit $28,6\,\%$ pour $S_3$.

## Correction de l'exercice 2 – Combien d'itinéraires ?

a) Le coefficient $(1\,;4)$ de $M^2$ vaut 2 : il y a **deux** itinéraires de longueur 2.

— Ce sont $1-2-4$ et $1-3-4$.

— **Vérification** : les voisins de la ville 1 sont 2 et 3, et toutes deux sont reliées à 4 ✓.

b) Le coefficient $(1\,;4)$ de $M$ vaut 0 : il n'y a **aucune** liaison directe entre les villes 1 et 4.

— **Lecture d'ensemble** : ces deux villes sont pourtant reliées — en deux étapes, et de deux façons différentes. Le réseau est donc **robuste** entre 1 et 4 : la panne d'une correspondance laisse l'autre itinéraire disponible.

— **Remarque sur la matrice** : $M^2$ a ses coefficients diagonaux égaux aux degrés (2, 3, 3, 2) ✓, ce qui donne 5 arêtes au total.

**Réponse.** a) deux : $1-2-4$ et $1-3-4$ · b) non, le coefficient de $M$ est nul.

## Correction de l'exercice 3 – Le PageRank d'un mini-web

a) Chaque **colonne** décrit les départs depuis une page, les liens étant équiprobables.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Colonne 1 : trois liens, donc $\frac{1}{3}$ chacun vers les pages 2, 3, 4 ✓.

— Colonnes de somme 1 ✓.

b) On calcule $TP$ avec $P = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ :

— Ligne 1 : $\frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,3 = 0,15 + 0,15 = 0,3$ ✓.

— Ligne 2 : $\frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,1 = 0,1 + 0,15 + 0,05 = 0,3$ ✓.

— Ligne 3 : $\frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,1 = 0,3$ ✓.

— Ligne 4 : $\frac{1}{3} \times 0,3 = 0,1$ ✓.

**Conclusion.** $TP = P$ et la somme vaut 1 : c'est bien la distribution invariante.

— **Classement** : les pages 1, 2 et 3 sont à égalité (30 % chacune), loin devant la page 4 (10 %).

— **Pourquoi la page** 4 **est faible** : une seule page pointe vers elle (la page 1), et encore en partageant son « vote » entre trois destinations. C'est le principe du PageRank : ce n'est pas le **nombre** de liens entrants qui compte, mais l'importance des pages qui les émettent, divisée par leur nombre de liens sortants.

**Réponse.** b) $TP = P$ ✓ : les pages 1, 2, 3 à 30 %, la page 4 à 10 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 4 – Fiabilité d'un serveur

a) Ici $a = 0,12$ (probabilité de quitter l'état disponible) et $b = 0,48$.

— Distribution invariante : $\dfrac{b}{a+b} = \dfrac{0,48}{0,60} = 0,8$.

— **Le taux de disponibilité est de** 80 % : le serveur est saturé une heure sur cinq en moyenne.

b) La relation est $p_{n+1} = (1 - 0,12 - 0,48)p_n + 0,48 = 0,4\,p_n + 0,48$, avec $p_0 = 1$.

— $p_n - 0,8$ est géométrique de raison $0,4$, avec $p_0 - 0,8 = 0,2$ :

$$p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,4^{\,n}$$

— **Vérification** : $p_1 = 0,8 + 0,08 = 0,88$, et le direct donne $0,4 + 0,48 = 0,88$ ✓.

**Seuil.** $0,8 + 0,2 \times 0,4^{\,n} < 0,82$ équivaut à $0,4^{\,n} < 0,1$.

— $n > \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,4} \approx \dfrac{-2,303}{-0,916} \approx 2,51$.

— **Conclusion** : dès la troisième heure. Vérification : $p_2 = 0,832$ et $p_3 = 0,8128 < 0,82$ ✓.

**Réponse.** a) 80 % · b) $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,4^{\,n}$ ; seuil franchi à $n = 3$.

## Correction de l'exercice 5 – Détecter un triangle

a) Chaque triangle est compté 6 fois dans la trace de $R^3$ : trois sommets de départ possibles, deux sens de parcours.

— Nombre de triangles : $\dfrac{18}{6} = 3$.

— **Interprétation** : il existe trois groupes de trois personnes toutes amies entre elles.

b) Le coefficient diagonal de $R^2$ au sommet $i$ vaut $\deg(i)$ : la trace de $R^2$ est donc la **somme des degrés**.

— Or la somme des degrés vaut deux fois le nombre d'arêtes : $2 \times 7 = 14$.

— **La trace de $R^2$ vaut donc 14.**

— **Ce que ces deux nombres mesurent** : la trace de $R^2$ donne le volume de relations, celle de $R^3$ la densité de « triangles » — un réseau où beaucoup d'amis de mes amis sont mes amis. Les sociologues appellent ce rapport le **coefficient de clustering**.

**Réponse.** a) 3 triangles · b) 14.

## Correction de l'exercice 6 – Une épidémie à trois états

a) $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $P_1$ est la **première colonne** de $T$ :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

— $P_2 = TP_1$ :

— Ligne $S$ : $0,6 \times 0,6 + 0,2 \times 0,2 + 0,2 \times 0,2 = 0,36 + 0,04 + 0,04 = 0,44$.

— Ligne $M$ : $0,2 \times 0,6 + 0,7 \times 0,2 + 0,2 \times 0,2 = 0,12 + 0,14 + 0,04 = 0,30$.

— Ligne $I$ : $0,2 \times 0,6 + 0,1 \times 0,2 + 0,6 \times 0,2 = 0,12 + 0,02 + 0,12 = 0,26$.

— $P_2 = (0,44\,;\,0,30\,;\,0,26)$, de somme 1 ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On calcule $TP$ avec $P = \left(\frac{1}{3} ; 0,4 ; \frac{4}{15}\right)$ :

— Ligne $S$ :
$0,6 \times \frac{1}{3} + 0,2 \times 0,4 + 0,2 \times \frac{4}{15} = 0,2 + 0,08 + \frac{0,8}{15} \approx 0,2 + 0,08 + 0,0533 = 0,3333$ ✓.

— Ligne $M$ : $0,2 \times \frac{1}{3} + 0,7 \times 0,4 + 0,2 \times \frac{4}{15} \approx 0,0667 + 0,28 + 0,0533 = 0,40$ ✓.

— Ligne $I$ : $0,2 \times \frac{1}{3} + 0,1 \times 0,4 + 0,6 \times \frac{4}{15} \approx 0,0667 + 0,04 + 0,16 = 0,2667$ ✓.

— Somme : $\frac{1}{3} + 0,4 + \frac{4}{15} = \frac{5+6+4}{15} = 1$ ✓.

— **Conclusion sanitaire** : à long terme, 40 % de la population est malade — un régime endémique qui se maintient indéfiniment.

**Réponse.** a) $(0,6 ; 0,2 ; 0,2)$ puis $(0,44 ; 0,30 ; 0,26)$ · b) $TP = P$ et somme 1 ✓.

## Correction de l’exercice 7 – Réseau vulnérable

a) **Oui** : de proche en proche, on va de $A$ à $E$ par le chemin $A - B - C - D - E$.

— Toutes les paires de serveurs sont reliées, le plus long chemin étant de longueur 4.

— C’est cohérent avec le critère du cours : pour un graphe d’ordre 5, il faut examiner $I + M + M^2 + M^3 + M^4$, et c’est bien le terme $M^4$ qui relie $A$ à $E$.

b) Les serveurs $B$**,** $C$ **et** $D$ sont tous critiques : chacun est un **point d’articulation**.

— Retirer $C$, par exemple, sépare $\{A ; B\}$ de $\{D ; E\}$ ✓.

— $A$ et $E$ ne le sont pas : ce sont des extrémités, leur panne ne coupe pas les autres.

**La correction.** Ajouter l’arête $EA$ transforme la chaîne en **cycle**.

— Chaque serveur a alors deux voisins, et la suppression de l’un quelconque laisse une chaîne connexe ✓.

— **Une seule arête suffit** donc, ce qui est le minimum : c’est exactement pourquoi les réseaux critiques sont câblés en anneau et non en ligne.

**Réponse.** a) oui · b) $B$, $C$ et $D$ sont critiques ; une seule arête ($EA$) suffit à fermer le réseau en anneau.

## Correction de l’exercice 8 – Deux modes de transport

a) Ici $a = 0,18$ et $b = 0,12$, l’état 1 étant « voiture ».

— Distribution invariante : $\frac{b}{a+b} = \frac{0,12}{0,30} = 0,4$.

— **À long terme,** 40 % **des habitants prennent la voiture** et 60 % les transports en commun.

b) La relation est $v_{n+1} = (1 - 0,18 - 0,12)v_n + 0,12 = 0,7\,v_n + 0,12$, avec $v_0 = 0,7$.

— Point fixe : $\ell = 0,7\ell + 0,12$ donne $0,3\ell = 0,12$, soit $\ell = 0,4$ ✓.

— $v_n - 0,4$ est géométrique de raison $0,7$, avec $v_0 - 0,4 = 0,3$ :

$$v_n = 0,4 + 0,3 \times 0,7^n$$

— **Vérification** : $v_1 = 0,4 + 0,21 = 0,61$, et le direct donne $0,7 \times 0,7 + 0,12 = 0,61$ ✓.

— **Lecture pour la collectivité** : la bascule est lente (raison $0,7$). Il faut environ $n = 8$ jours pour descendre sous 45 %, puisque $0,3 \times 0,7^8 \approx 0,017$.

**Réponse.** a) 40 % voiture, 60 % transports · b) $v_n = 0,4 + 0,3 \times 0,7^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l’exercice 9 – Chemins dans un réseau orienté

a) Un 1 en ligne $i$, colonne $j$ pour chaque flux $i \to j$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— La matrice n’est pas symétrique : les flux sont orientés ✓.

b) On suit les flèches depuis le poste 1 :

— $1 \to 2 \to 4 \to 1$ : c’est un **circuit de longueur 3**.

— $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ : c’est un **circuit de longueur 4**.

— Il y a donc deux circuits, de longueurs 3 et 4.

— **Vérification matricielle** : le coefficient $(1\,;1)$ de $A^3$ vaut 1 (le circuit court) et celui de $A^4$ vaut 1 (le circuit long).

— **Lecture industrielle** : un circuit dans un graphe de production signale un **recyclage** — la matière repasse par le poste 1. Si le graphe représentait des dépendances de tâches, ce circuit rendrait l’ordonnancement impossible.

**Réponse.** a) $A$ ci-dessus · b) oui : $1 \to 2 \to 4 \to 1$ (longueur 3) et $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ (longueur 4).

## Correction de l’exercice 10 – Un marcheur sur une étoile

a) Degrés : $\deg(C) = 4$ et $\deg(A_i) = 1$ pour chacun des quatre autres.

— Somme des degrés : $4 + 4 \times 1 = 8$, donc le graphe a 4 arêtes.

— Distribution invariante : $p_C = \dfrac{4}{8} = 0,5$ et $p_{A_i} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.

$$P = (0,5\,;0,125\,;0,125\,;0,125\,;0,125)$$

— **Contrôle** : la somme vaut $0,5 + 4 \times 0,125 = 1$ ✓.

— **Interprétation** : le marcheur passe **la moitié** de son temps au centre — ce qui est évident, puisqu’il y revient à chaque pas depuis une branche.

b) **Non**, la marche ne converge pas.

— L’étoile est **biparte** : les groupes sont $\{C\}$ et $\{A_1, \ldots, A_4\}$, et chaque arête relie l’un à l’autre.

— Le marcheur est donc au centre aux étapes paires et sur une branche aux étapes impaires (s’il part du centre) : la distribution alterne indéfiniment.

— **Ce qui reste vrai** : la distribution invariante décrit la **proportion de temps** passée à chaque sommet, et elle vaut bien $\dfrac{1}{2}$ pour le centre ✓.

**Réponse.** a) $p_C = 0,5$ et $p_{A_i} = 0,125$ · b) non : l’étoile est biparte, la marche oscille.

## Correction de l’exercice 11 – Ajouter un lien change le classement

**Ce qui change dans la matrice.** La page 2 avait deux liens sortants (vers 1 et 3), chacun de poids $\dfrac{1}{2}$. Elle en a maintenant trois, chacun de poids $\dfrac{1}{3}$.

— La colonne 2 passe de $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ à $\left(\frac{1}{3}\,;0\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

**Les deux effets.**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Effet positif pour la page** 4 : elle reçoit désormais une part du « vote » de la page 2, qui pèse $0,3$. Son score augmente donc d'environ $\frac{1}{3} \times 0,3 = 0,1$ au premier tour.

— **Effet négatif pour les pages** 1 **et** 3 : le vote de la page 2 est maintenant partagé en trois au lieu de deux, elles perdent chacune un peu.

**Conclusion.** Le classement de la page 4 s'améliore nettement, au détriment des pages 1 et 3.

— **Le principe du PageRank** : le score d'une page est la somme des scores des pages qui pointent vers elle, chacun **divisé par leur nombre de liens sortants**. Recevoir un lien d'une page importante qui en émet peu vaut beaucoup plus que dix liens de pages sans audience.

— **La conséquence économique** : c'est toute l'industrie du référencement qui repose sur cette formule, et la raison pour laquelle l'achat de liens est traqué par les moteurs.

**Réponse.** La page 4 reçoit une part du score de la page 2 ; les pages 1 et 3 voient ce vote se diviser en trois au lieu de deux.

## Correction de l'exercice 12 – Retour vers la matrice

On lit les trois informations de la formule.

— **La limite** est $0,25$ : c'est $\frac{b}{a+b} = 0,25$, donc $b = 0,25(a+b)$, soit $3b = a$… vérifions : $b = 0,25a + 0,25b$ donne $0,75b = 0,25a$, donc $a = 3b$.

— **La raison** est $0,6$ : $1 - a - b = 0,6$, donc $a + b = 0,4$.

— En combinant : $3b + b = 0,4$, donc $b = 0,1$ et $a = 0,3$.

— **La valeur initiale** : $p_0 = 0,25 + 0,55 = 0,8$.

$$T = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$$

— **Vérifications** : colonnes de somme 1 ✓ ; distribution invariante $\frac{0,1}{0,4} = 0,25$ ✓ ; raison $1 - 0,4 = 0,6$ ✓.

— **Contrôle sur un terme** : $p_1$ devrait valoir $0,7 \times 0,8 + 0,1 \times 0,2 = 0,56 + 0,02 = 0,58$, et la formule donne $0,25 + 0,55 \times 0,6 = 0,58$ ✓.

**Réponse.** $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $p_0 = 0,8$.

## Correction de l'exercice 13 – Une file d'attente simplifiée

a) On prend l'état 1 = « libre ». Alors $a = 0,3$ (probabilité de devenir occupé) et $b = 0,5$ (probabilité de redevenir libre).

— Proportion de temps **libre** : $\frac{b}{a+b} = \frac{0,5}{0,8} = 0,625$.

— Proportion de temps **occupé** : $1 - 0,625 = 0,375$, soit $37,5\,\%$.

— **Vérification par la formule symétrique** : $\frac{a}{a+b} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375$ ✓.

b) Une journée de 8 heures compte $8 \times 60 = 480$ minutes.

— Temps occupé : $0,375 \times 480 = 180$ minutes, soit 3 heures.

— **Interprétation** : le guichet travaille trois heures sur huit. Un taux d'occupation de $37,5\,\%$ laisse une large marge, mais ce calcul **ne dit rien** de la longueur des files : un modèle à deux états ne compte pas les clients en attente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Pour aller plus loin** : la durée moyenne d'un service est $\frac{1}{0,5} = 2$ minutes, et celle d'une période libre $\frac{1}{0,3} \approx 3,33$ minutes — le rapport $\frac{2}{2+3,33} \approx 0,375$ retrouve bien le taux d'occupation ✓.

**Réponse.** a) $37,5\,\%$ du temps · b) 180 minutes, soit 3 heures.

## Correction de l'exercice 14 – Comparer deux réseaux

**Réseau $A$ (chaîne).** Degrés : 1, 2, 2, 2, 1, soit une somme de 8 et 4 arêtes.

— Distribution invariante : $\left(\frac{1}{8}\,;\frac{2}{8}\,;\frac{2}{8}\,;\frac{2}{8}\,;\frac{1}{8}\right)$.

— Les extrémités sont deux fois moins visitées que les sommets intérieurs.

**Réseau $B$ (cycle).** Degrés : tous égaux à 2, somme 10, donc 5 arêtes.

— Distribution invariante : $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ pour chaque sommet — **équirépartition**, conformément à la symétrie du cycle.

**Robustesse.**

— Dans la chaîne, la panne de $S_2$, $S_3$ ou $S_4$ **coupe** le réseau en deux morceaux.

— Dans le cycle, la panne d'un sommet quelconque laisse une chaîne : le réseau **reste connexe**.

— **Le prix à payer** : une seule arête de plus ($S_5 - S_1$) pour passer de 4 à 5 liaisons.

**Convergence.** Aucun des deux ne garantit la convergence de la même façon :

— La chaîne est **biparte** : la marche oscille.

— Le cycle de longueur 5 contient un cycle **impair** : la marche y **converge** vers l'équirépartition.

— **Conclusion** : le cycle est meilleur sur les trois critères — équité, robustesse et convergence.

**Réponse.** Chaîne : $\left(\frac{1}{8}\,;\frac{2}{8}\,;\frac{2}{8}\,;\frac{2}{8}\,;\frac{1}{8}\right)$, fragile et biparte · Cycle : équirépartition $\frac{1}{5}$, robuste, convergent.

## Correction de l'exercice 15 – Bilan : un réseau de bout en bout

a) Avec l'ordre $A$, $B$, $C$, $D$ :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Degrés : $\deg(A) = 2$, $\deg(B) = 3$, $\deg(C) = 2$, $\deg(D) = 1$.

— Somme 8, donc 4 arêtes ✓ — c'est bien le nombre annoncé.

b) On calcule le coefficient $(1\,;4)$ de $M^2$ : ligne 1 de $M$ contre colonne 4 :

— $0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1$.

— Il y a **un seul** chemin de longueur 2 de $A$ à $D$ : $A - B - D$.

— C'est cohérent : $D$ n'a que $B$ pour voisin, et $A$ est bien relié à $B$ ✓.

c) $p_i = \frac{\deg(i)}{8}$ :

$$P = \left(\frac{2}{8}\,;\frac{3}{8}\,;\frac{2}{8}\,;\frac{1}{8}\right) = (0,25\,;0,375\,;0,25\,;0,125)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Vérification** de la ligne $A$ : le marcheur arrive en $A$ depuis $B$ (probabilité $\frac{1}{3}$) ou depuis $C$ (probabilité $\frac{1}{2}$), soit $\frac{1}{3} \times 0,375 + \frac{1}{2} \times 0,25 = 0,125 + 0,125 = 0,25$ ✓.

— **Convergence** : le graphe est connexe et contient le triangle $ABC$, donc un cycle de longueur **impaire** : il n'est pas biparti, la marche **converge** vers $P$.

— **Interprétation** : le sommet $B$, seul point d'articulation du réseau, est aussi le plus visité ($37,5\,\%$) ; le sommet $D$, en bout de branche, l'est le moins ($12,5\,\%$).

**Réponse.** a) degrés $2, 3, 2, 1$ · b) un seul : $A - B - D$ · c) $(0,25\,;0,375\,;0,25\,;0,125)$, convergence assurée (triangle $ABC$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).