Plaquette 1 – Matrice d’adjacence, chemins et distributions stables

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On décrit un graphe par sa **matrice d’adjacence**, on compte les chemins par les puissances de cette matrice, puis on étudie une **marche aléatoire** : matrice de transition, distribution après n étapes, distribution **invariante**.

Exercice 1 – Matrice d’adjacence

Un graphe non orienté a quatre sommets 1, 2, 3, 4 et les arêtes : $1-2$, $1-3$, $2-3$, $3-4$.

Écrire sa matrice d’adjacence.

Exercice 2 – Degrés et nombre d’arêtes

Un graphe non orienté a pour degrés 3, 3, 2, 2, 2.

a) Combien d’arêtes comporte-t-il ?

b) Peut-il exister un graphe dont les degrés sont 3, 3, 3, 1, 1 ?

Exercice 3 – Compter des chemins de longueur 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (graphe triangle).

a) Calculer M^2.

b) Interpréter le coefficient $(1\,;1)$ et le coefficient $(1\,;2)$.

Exercice 4 – Chemins de longueur 3

Avec le même graphe triangle, calculer M^3 et donner le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 2.

Exercice 5 – Graphe orienté

Un graphe orienté a trois sommets et les arcs : $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$, $1 \to 3$.

a) Écrire sa matrice d’adjacence (ligne : départ).

b) La matrice est-elle symétrique ? Pourquoi ?

Exercice 6 – Matrice de transition d’une marche

Un mobile se déplace entre trois sommets A, B, C. Depuis A, il va en B ou C avec la même probabilité ; depuis B, il va toujours en C ; depuis C, il va en A ou B avec la même probabilité.

Écrire la matrice de transition (colonnes : état de départ).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Distribution après deux étapes

Avec la matrice T précédente et un départ certain en A, c'est-à-dire $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Calculer P_1 et P_2.

Exercice 8 – Distribution invariante (deux états)

Soit $T = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Déterminer la distribution invariante $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 1$.

Exercice 9 – Convergence

Avec la matrice $T = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Calculer P_1, P_2, P_3 (au millième) et comparer à la distribution invariante.

Exercice 10 – Marche sur un triangle

Un mobile se déplace sur les trois sommets d'un triangle : à chaque étape, il va sur l'un des **deux autres** sommets avec la même probabilité.

a) Écrire la matrice de transition.

b) Déterminer la distribution invariante.

Exercice 11 – État absorbant

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ (l'état 1 est absorbant : on ne le quitte jamais).

a) Calculer P_1, P_2, P_3 en partant de $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Vers quelle distribution tend P_n ?

Exercice 12 – Problème : navigation sur un site

Un visiteur navigue entre trois pages. La matrice de transition est

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que T est bien une matrice de transition.

b) Déterminer la distribution invariante.

Exercice 13 – Le graphe complet à quatre sommets

Le graphe complet K_4 a quatre sommets 1, 2, 3, 4, chacun relié aux trois autres.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Donner sa matrice d'adjacence M, le degré de chaque sommet et le nombre d'arêtes.

b) Calculer M^2 et interpréter ses coefficients.

Exercice 14 – Lire un graphe probabiliste

Chaque jour, un client choisit entre deux boulangeries A et B. S'il est allé en A, il y retourne le lendemain avec la probabilité 0,7 ; s'il est allé en B, il va en A le lendemain avec la probabilité 0,4.

a) Écrire la matrice de transition T (convention en colonnes : la colonne j donne les probabilités de partir de l'état j).

b) Déterminer la distribution invariante.

Exercice 15 – Synthèse : graphe et marche

On considère le graphe non orienté de sommets A, B, C et d'arêtes $A-B$, $B-C$ (une « chaîne »).

a) Écrire la matrice d'adjacence et donner les degrés.

b) Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 de A vers C ?

c) Pour la marche aléatoire où l'on choisit au hasard une arête partant du sommet courant, écrire la matrice de transition et vérifier que $P = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$ est invariante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).