

Plaquette 1 – Matrice d’adjacence, chemins et distributions stables

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On décrit un graphe par sa **matrice d’adjacence**, on compte les chemins par les puissances de cette matrice, puis on étudie une **marche aléatoire** : matrice de transition, distribution après n étapes, distribution **invariante**.

Exercice 1 – Matrice d’adjacence

Un graphe non orienté a quatre sommets 1, 2, 3, 4 et les arêtes : 1–2, 1–3, 2–3, 3–4.

Écrire sa matrice d’adjacence.

Exercice 2 – Degrés et nombre d’arêtes

Un graphe non orienté a pour degrés 3, 3, 2, 2, 2.

- Combien d’arêtes comporte-t-il ?
- Peut-il exister un graphe dont les degrés sont 3, 3, 3, 1, 1 ?

Exercice 3 – Compter des chemins de longueur 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (graphe triangle).

- Calculer M^2 .
- Interpréter le coefficient (1 ; 1) et le coefficient (1 ; 2).

Exercice 4 – Chemins de longueur 3

Avec le même graphe triangle, calculer M^3 et donner le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 2.

Exercice 5 – Graphe orienté

Un graphe orienté a trois sommets et les arcs : $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3$.

- Écrire sa matrice d’adjacence (ligne : départ).
- La matrice est-elle symétrique ? Pourquoi ?

Exercice 6 – Matrice de transition d’une marche

Un mobile se déplace entre trois sommets A , B , C . Depuis A , il va en B ou C avec la même probabilité ; depuis B , il va toujours en C ; depuis C , il va en A ou B avec la même probabilité.

Écrire la matrice de transition (colonnes : état de départ).

Exercice 7 - Distribution après deux étapes

Avec la matrice T précédente et un départ certain en A , c'est-à-dire $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Calculer P_1 et P_2 .

Exercice 8 - Distribution invariante (deux états)

Soit $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Déterminer la distribution invariante $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 1$.

Exercice 9 - Convergence

Avec la matrice $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Calculer P_1, P_2, P_3 (au millième) et comparer à la distribution invariante.

Exercice 10 - Marche sur un triangle

Un mobile se déplace sur les trois sommets d'un triangle : à chaque étape, il va sur l'un des **deux autres** sommets avec la même probabilité.

- Écrire la matrice de transition.
- Déterminer la distribution invariante.

Exercice 11 - État absorbant

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ (l'état 1 est absorbant : on ne le quitte jamais).

- Calculer P_1, P_2, P_3 en partant de $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Vers quelle distribution tend P_n ?

Exercice 12 - Problème : navigation sur un site

Un visiteur navigue entre trois pages. La matrice de transition est

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que T est bien une matrice de transition.
- Déterminer la distribution invariante.

Exercice 13 - Synthèse : graphe et marche

On considère le graphe non orienté de sommets A, B, C et d'arêtes $A-B, B-C$ (une « chaîne »).

- a) Écrire la matrice d'adjacence et donner les degrés.
- b) Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 de A vers C ?
- c) Pour la marche aléatoire où l'on choisit au hasard une arête partant du sommet courant, écrire la matrice de transition et vérifier que $P = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix}$ est invariante.