

Plaquette 4 – Graphes probabilistes : convergence et démonstrations

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On démontre au lieu de conjecturer : ramener une marche à deux états à une **suite arithmético-géométrique**, établir l'expression explicite de p_n , prouver la **convergence** vers la distribution invariante, obtenir T^n par **récurrence** ou par **décomposition**, et repérer les cas où la convergence n'a pas lieu.

Exercice 1 – De la matrice à la suite

Soit $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ et p_n la probabilité d'être dans l'état 1 à l'étape n .

Montrer que $p_{n+1} = 0,3 p_n + 0,4$.

Exercice 2 – Expression explicite et limite

On garde $p_{n+1} = 0,3 p_n + 0,4$, avec $p_0 = 1$.

- a) Déterminer le point fixe de la relation.
- b) En déduire p_n et sa limite.

Exercice 3 – La formule générale

Soit $T = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

- a) Montrer que $p_{n+1} = (1-a-b)p_n + b$.
- b) Déterminer la distribution invariante et démontrer la convergence.

Exercice 4 – Convergence monotone ou oscillante

On compare deux graphes probabilistes :

- T_1 avec $a = 0,2$ et $b = 0,3$;
- T_2 avec $a = 0,7$ et $b = 0,8$.

Dans chaque cas, partant de $p_0 = 1$, décrire la façon dont p_n converge.

Exercice 5 – Quand rien ne converge

On considère $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer T^2 , T^3 et décrire la marche.
- b) La distribution invariante existe-t-elle ? La suite (P_n) converge-t-elle ?

Exercice 6 - Puissance par récurrence

Soit $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que

$$T^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 + 3 \times 0,3^n & 4 - 4 \times 0,3^n \\ 3 - 3 \times 0,3^n & 3 + 4 \times 0,3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 7 - Par la décomposition

On pose $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $T = PDP^{-1}$.
- En déduire la limite de T^n .

Exercice 8 - Retrouver les paramètres

Un graphe probabiliste à deux états a pour distribution invariante $(0,25; 0,75)$, et la suite (p_n) vérifie $p_{n+1} = 0,4p_n + c$.

Déterminer c , puis les paramètres a et b de la matrice.

Exercice 9 - Vitesse de convergence

Une marche vérifie $p_n = 0,6 + 0,4 \times 0,5^n$.

- À partir de quel rang a-t-on $|p_n - 0,6| < 0,01$?
- Même question pour une marche de raison $0,9$ et d'écart initial identique.

Exercice 10 - Un état stable dépendant d'un paramètre

Soit $T = \begin{pmatrix} 1-a & 0,3 \\ a & 0,7 \end{pmatrix}$, avec $0 < a < 1$.

- Exprimer la distribution invariante en fonction de a .
- Pour quelle valeur de a les deux états sont-ils équiprobables à long terme ?

Exercice 11 - Un seuil à franchir

Un opérateur détient 10 % du marché. Chaque mois, il conserve 95 % de ses clients et capte 5 % de ceux du concurrent.

- Établir la relation de récurrence sur sa part de marché p_n .
- Au bout de combien de mois dépassera-t-il 40 % ?

Exercice 12 - Trois états, une seule invariante

Soit $T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Montrer que $(0,3; 0,45; 0,25)$ est une distribution invariante, et expliquer pourquoi elle est unique.

Exercice 13 – Démontrer la conservation

Soit T une matrice de transition (colonnes de somme 1) et X une colonne dont la somme des coefficients vaut 1.

Montrer que la somme des coefficients de TX vaut encore 1.

Exercice 14 – Comparer deux modèles

Deux entreprises modélisent la fidélité de leurs clients :

- modèle A : $p_{n+1} = 0,8 p_n + 0,1$;
- modèle B : $p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,25$.

- a) Comparer leurs limites.
- b) Comparer leurs vitesses de convergence.

Exercice 15 – Bilan : de la matrice à la limite

Soit $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,25 \\ 0,4 & 0,75 \end{pmatrix}$ et $p_0 = 1$.

- a) Établir la relation de récurrence vérifiée par p_n .
- b) Déterminer p_n et sa limite.
- c) À partir de quel rang a-t-on $p_n < 0,40$?