

## Plaquette 3 - Marches aléatoires sur un graphe

### Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

#### Exercices

#### Méthode

Un marcheur se déplace au hasard de sommet en sommet. On construit la **matrice de transition** associée à un graphe, on calcule la **distribution après  $n$  étapes**, on détermine la **distribution invariante**, et l'on distingue les marches qui **convergent** de celles qui **oscillent** indéfiniment.

#### Exercice 1 - Construire la matrice de transition

Un marcheur se déplace sur un triangle de sommets  $A, B, C$  (tous reliés deux à deux). À chaque étape, il choisit au hasard l'un des deux sommets voisins.

- Écrire la matrice de transition  $T$ .
- Vérifier la propriété caractéristique des colonnes.

#### Exercice 2 - Où est le marcheur ?

Le marcheur du triangle part du sommet  $A$ .

Calculer la probabilité qu'il soit en  $A$  après 1, 2, 3 et 4 étapes.

#### Exercice 3 - La formule explicite

On note  $a_n$  la probabilité que le marcheur du triangle soit en  $A$  après  $n$  étapes, en partant de  $A$ .

- Montrer que  $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$ .
- En déduire  $a_n$  et sa limite.

#### Exercice 4 - La distribution invariante du triangle

Déterminer la distribution invariante de la marche sur le triangle, et l'interpréter.

#### Exercice 5 - Une marche sur un chemin

Trois sommets alignés :  $A - B - C$  ( $B$  est relié à  $A$  et  $C$  ;  $A$  et  $C$  ne sont pas reliés).

- Écrire la matrice de transition de la marche aléatoire simple.
- Le marcheur part de  $A$ . Où se trouve-t-il après 1, 2, 3 étapes ?

#### Exercice 6 - Invariante malgré l'oscillation

Pour la marche sur le chemin  $A - B - C$  :

- Déterminer la distribution invariante.
- La suite  $(P_n)$  converge-t-elle vers cette distribution ? Expliquer.

**Exercice 7 – Une marche sur quatre sommets**

Un graphe a pour arêtes  $AB, AC, BC, CD$ .

- Donner les degrés et le nombre d'arêtes.
- En déduire la distribution invariante de la marche aléatoire simple, sans calcul matriciel.

**Exercice 8 – Navigation sur un site**

Un site comporte trois pages. Depuis la page 1, un visiteur va en 2 ou en 3 avec la même probabilité. Depuis la page 2, il va en 1 ou en 3 avec la même probabilité. Depuis la page 3, il revient toujours en 1.

- Écrire la matrice de transition.
- Un visiteur arrive sur la page 1. Où est-il après 2 clics ?

**Exercice 9 – La page la plus visitée**

Déterminer la distribution invariante de la navigation précédente, et dire quelle page est la plus consultée à long terme.

**Exercice 10 – Une marche avec un piège**

Un marcheur circule entre trois salles. Depuis la salle 1, il va en 2 ou reste en 1 (une chance sur deux). Depuis la salle 2, il va en 1 ou en 3 (une chance sur deux). La salle 3 est un **piège** : il y reste définitivement.

- Écrire la matrice de transition.
- Quelle est la probabilité d'être piégé après 3 étapes, en partant de la salle 2 ?

**Exercice 11 – Deux issues absorbantes**

Un joueur possède 2 jetons. À chaque partie, il en gagne un ou en perd un, avec la même probabilité. Il s'arrête s'il n'a plus rien (0 jeton) ou s'il en a 4.

On admet que la probabilité de finir avec 4 jetons, en partant de  $k$  jetons, vaut  $\frac{k}{4}$ .

- Quelle est la probabilité qu'il finisse ruiné en partant de 2 jetons ?
- Et en partant de 1 jeton ?

**Exercice 12 – Lire une puissance**

Pour la marche sur le triangle, on donne

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0,250 & 0,375 & 0,375 \\ 0,375 & 0,250 & 0,375 \\ 0,375 & 0,375 & 0,250 \end{pmatrix}$$

- Que représente le coefficient  $(2; 1)$  ?
- Pourquoi les coefficients diagonaux sont-ils plus petits que les autres ?

**Exercice 13 – Un graphe orienté sans retour**

Un processus passe par trois étapes  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$ , sans retour en arrière : depuis  $E_1$ , on passe en  $E_2$  avec la probabilité 0,4 (sinon on reste en  $E_1$ ) ; depuis  $E_2$ , on passe en  $E_3$  avec la probabilité 0,6 ;  $E_3$  est final.

- a) Écrire la matrice de transition.
- b) Quelle est la distribution invariante ?

**Exercice 14 – Le marcheur sur un carré**

Un marcheur se déplace sur les quatre sommets d'un carré  $ABCD$  (arêtes  $AB, BC, CD, DA$ ), en choisissant au hasard l'un des deux voisins.

- a) Déterminer la distribution invariante.
- b) La marche converge-t-elle vers cette distribution ?

**Exercice 15 – Bilan : une marche complète**

Un graphe a pour arêtes  $AB, BC, CA$  et  $CD$  (un triangle avec une antenne).

- a) Écrire la matrice de transition de la marche aléatoire simple.
- b) Déterminer la distribution invariante par la formule des degrés, puis la vérifier.
- c) La marche converge-t-elle ? Justifier.