

Plaquette 2 - Matrice d'adjacence, degrés et comptage de chemins

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Le passage du **dessin** au **calcul** : traduire un graphe en **matrice d'adjacence**, lire les degrés, compter les **chemins de longueur n** grâce aux puissances de cette matrice, détecter les **triangles**, et démontrer qu'un graphe est **connexe**.

Exercice 1 - Du graphe à la matrice

Un graphe non orienté a pour sommets A, B, C, D et pour arêtes : AB, AC, BC, CD .

- Donner son ordre, le degré de chaque sommet et le nombre d'arêtes.
- Écrire sa matrice d'adjacence M (sommets dans l'ordre A, B, C, D).

Exercice 2 - De la matrice au graphe

On donne la matrice d'adjacence

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le graphe est-il orienté ? Décrire ses arêtes.
- Combien a-t-il d'arêtes ? Comment s'appelle un tel graphe ?

Exercice 3 - Chemins de longueur 2

On reprend $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (sommets A, B, C, D).

- Calculer M^2 .
- Interpréter les coefficients $(1; 4)$ et $(3; 3)$.

Exercice 4 - Chemins de longueur 3

Toujours avec le même graphe, on donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 de A à C ? Les citer.
- Que signifie le coefficient $(4; 4) = 0$?

Exercice 5 - Compter les triangles

- a) Avec M^3 de l'exercice précédent, déterminer le nombre de triangles du graphe.
- b) Même question pour le graphe complet K_4 , sachant que K_4^3 a tous ses coefficients diagonaux égaux à 6.

Exercice 6 - Un graphe orienté

Un graphe orienté à quatre sommets a pour arcs : $A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A$.

- a) Écrire sa matrice d'adjacence O .
- b) Donner les degrés entrant et sortant de chaque sommet.

Exercice 7 - Chemins dans un graphe orienté

Avec la matrice O précédente, on donne

$$O^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad O^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Existe-t-il un chemin de longueur 2 de A à D ? Le citer.
- b) Que signifie le coefficient $(1; 1)$ de O^3 ?

Exercice 8 - Tester la connexité

On reprend le graphe de matrice M (sommets A, B, C, D) et l'on donne

$$I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le graphe est-il connexe ? Justifier.

Exercice 9 - Un cycle à cinq sommets

Cinq sommets $S_1, \dots, S_5$ forment un cycle : chacun est relié au suivant, et S_5 à S_1 .

On donne C^2 et C^3 , où C est la matrice d'adjacence :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 de S_1 à S_2 ?
- b) Le graphe contient-il un triangle ?

Exercice 10 - Un réseau routier

Cinq villes sont reliées par des routes selon la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Combien de routes le réseau compte-t-il ?
- On donne le coefficient $(1; 4)$ de G^2 : il vaut 2. Interpréter.

Exercice 11 - Amis communs

Dans un réseau social, la matrice d'adjacence R indique qui est ami avec qui (relation symétrique).

- Que représente le coefficient $(i; j)$ de R^2 lorsque $i \neq j$?
- Et lorsque $i = j$?

Exercice 12 - Un graphe biparti

Quatre sommets forment un carré : A relié à B et D , C relié à B et D (et rien d'autre).

- Écrire la matrice d'adjacence.
- Montrer qu'il n'existe aucun chemin de longueur **impair** de A à C .

Exercice 13 - Robustesse d'un réseau

Un réseau informatique relie quatre serveurs selon la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le réseau reste-t-il connexe si le serveur C (le troisième) tombe en panne ?
- Quel est le point faible de ce réseau ?

Exercice 14 - Compter sans matrice

Dans le graphe complet K_5 (cinq sommets tous reliés deux à deux) :

- Combien y a-t-il d'arêtes ?
- Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 entre deux sommets distincts donnés ?
- Combien y a-t-il de triangles ?

Exercice 15 - Bilan : lire un graphe de bout en bout

Un graphe orienté a pour matrice d'adjacence

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Donner la liste des arcs et les degrés entrants.

b) On donne $D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Citer un circuit de longueur 3.

c) Depuis le sommet 1, peut-on atteindre tous les autres sommets ?