Plaquette 2 – Matrice d'adjacence, degrés et comptage de chemins

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Le passage du **dessin** au **calcul** : traduire un graphe en **matrice d'adjacence**, lire les degrés, compter les **chemins de longueur** n grâce aux puissances de cette matrice, détecter les **triangles**, et démontrer qu'un graphe est **connexe**.

Exercice 1 – Du graphe à la matrice

Un graphe non orienté a pour sommets A, B, C, D et pour arêtes : AB, AC, BC, CD.

a) Donner son ordre, le degré de chaque sommet et le nombre d'arêtes.

b) Écrire sa matrice d'adjacence M (sommets dans l'ordre A, B, C, D).

Exercice 2 – De la matrice au graphe

On donne la matrice d'adjacence

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Le graphe est-il orienté ? Décrire ses arêtes.

b) Combien a-t-il d'arêtes ? Comment s'appelle un tel graphe ?

Exercice 3 – Chemins de longueur 2

On reprend $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (sommets A, B, C, D).

a) Calculer M^2.

b) Interpréter les coefficients $(1\,;4)$ et $(3\,;3)$.

Exercice 4 – Chemins de longueur 3

Toujours avec le même graphe, on donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 de A à C ? Les citer.

b) Que signifie le coefficient $(4\,;4) = 0$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Compter les triangles

a) Avec M^3 de l'exercice précédent, déterminer le nombre de triangles du graphe.

b) Même question pour le graphe complet K_4, sachant que K_4^3 a tous ses coefficients diagonaux égaux à 6.

Exercice 6 – Un graphe orienté

Un graphe orienté à quatre sommets a pour arcs : $A \to B$, $A \to C$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to A$.

a) Écrire sa matrice d'adjacence O.

b) Donner les degrés entrant et sortant de chaque sommet.

Exercice 7 – Chemins dans un graphe orienté

Avec la matrice O précédente, on donne

$$O^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad O^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Existe-t-il un chemin de longueur 2 de A à D ? Le citer.

b) Que signifie le coefficient $(1\,;1)$ de O^3 ?

Exercice 8 – Tester la connexité

On reprend le graphe de matrice M (sommets A, B, C, D) et l'on donne

$$I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le graphe est-il connexe ? Justifier.

Exercice 9 – Un cycle à cinq sommets

Cinq sommets $S_1, \dots, S_5$ forment un cycle : chacun est relié au suivant, et S_5 à S_1.

On donne C^2 et C^3, où C est la matrice d'adjacence :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 de S_1 à S_2 ?

b) Le graphe contient-il un triangle ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Un réseau routier

Cinq villes sont reliées par des routes selon la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Combien de routes le réseau compte-t-il ?

b) On donne le coefficient $(1\,;4)$ de G^2 : il vaut 2. Interpréter.

Exercice 11 – Amis communs

Dans un réseau social, la matrice d'adjacence R indique qui est ami avec qui (relation symétrique).

a) Que représente le coefficient $(i\,;j)$ de R^2 lorsque $i \neq j$?

b) Et lorsque $i = j$?

Exercice 12 – Un graphe biparti

Quatre sommets forment un carré : A relié à B et D, C relié à B et D (et rien d'autre).

a) Écrire la matrice d'adjacence.

b) Montrer qu'il n'existe aucun chemin de longueur **impaire** de A à C.

Exercice 13 – Robustesse d'un réseau

Un réseau informatique relie quatre serveurs selon la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Le réseau reste-t-il connexe si le serveur C (le troisième) tombe en panne ?

b) Quel est le point faible de ce réseau ?

Exercice 14 – Compter sans matrice

Dans le graphe complet K_5 (cinq sommets tous reliés deux à deux) :

a) Combien y a-t-il d'arêtes ?

b) Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 entre deux sommets distincts donnés ?

c) Combien y a-t-il de triangles ?

Exercice 15 – Bilan : lire un graphe de bout en bout

Un graphe orienté a pour matrice d'adjacence

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Donner la liste des arcs et les degrés entrants.

b) On donne $D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Citer un circuit de longueur 3.

c) Depuis le sommet 1, peut-on atteindre tous les autres sommets ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).