

Plaquette 5 – Synthèse : réseaux, PageRank et modèles aléatoires

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La plaquette de synthèse : chaque exercice part d'un **réseau réel** — métro, serveurs, pages web, épidémie, réseau social — et demande le trajet complet : **traduire** en graphe, écrire la matrice, **compter** des chemins ou **calculer** une distribution, puis **interpréter** le résultat dans le contexte.

Exercice 1 – Un réseau de métro

Cinq stations sont reliées : $S_1 - S_2$, $S_1 - S_3$, $S_2 - S_3$, $S_2 - S_4$, $S_3 - S_4$, $S_3 - S_5$, $S_4 - S_5$.

- Donner les degrés et le nombre de liaisons.
- Un voyageur circule au hasard. Quelle proportion de son temps passe-t-il dans chaque station à long terme ?

Exercice 2 – Combien d'itinéraires ?

Dans un réseau à quatre villes de matrice d'adjacence

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on donne $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Combien y a-t-il d'itinéraires de la ville 1 à la ville 4 avec exactement une correspondance ?
- Existe-t-il une liaison directe entre 1 et 4 ?

Exercice 3 – Le PageRank d'un mini-web

Quatre pages sont liées ainsi :

- la page 1 pointe vers 2, 3 et 4 ;
- la page 2 pointe vers 1 et 3 ;
- la page 3 pointe vers 1 et 2 ;
- la page 4 pointe vers 2 et 3.

Un internaute clique au hasard sur l'un des liens de la page où il se trouve.

- Écrire la matrice de transition.
- Vérifier que $(0, 3; 0, 3; 0, 3; 0, 1)$ est la distribution invariante et classer les pages.

Exercice 4 – Fiabilité d'un serveur

Un serveur est chaque heure « disponible » ou « saturé ». S'il est disponible, il sature l'heure suivante avec la probabilité 0,12. S'il est saturé, il redevient disponible avec la probabilité 0,48.

- Déterminer le taux de disponibilité à long terme.
- Partant d'un serveur disponible, écrire p_n et dire au bout de combien d'heures $p_n < 0,82$.

Exercice 5 – Détecter un triangle

Dans un réseau social de cinq membres, la matrice d'adjacence R vérifie : la somme des coefficients diagonaux de R^3 vaut 18, et le réseau compte 7 amitiés.

- Combien y a-t-il de triangles d'amitié ?
- Que vaudrait la somme des coefficients diagonaux de R^2 ?

Exercice 6 – Une épidémie à trois états

Une population est répartie en trois états : sain (S), malade (M), immunisé (I). La matrice de transition hebdomadaire est

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Toute la population est saine au départ.

- Calculer la répartition après une semaine, puis deux.
- Vérifier que $\left(\frac{1}{3}; 0,4; \frac{4}{15}\right)$ est la distribution invariante.

Exercice 7 – Réseau vulnérable

Un réseau de cinq serveurs a pour arêtes : AB, BC, CD, DE (une chaîne).

- Le réseau est-il connexe ?
- Quel serveur est le plus critique ? Combien d'arêtes faudrait-il ajouter pour qu'aucune panne simple ne coupe le réseau ?

Exercice 8 – Deux modes de transport

Chaque jour, 18 % des automobilistes passent aux transports en commun, et 12 % des usagers des transports repassent à la voiture. Aujourd'hui, 70 % des habitants prennent la voiture.

- Déterminer la répartition à long terme.
- Écrire v_n , la proportion d'automobilistes au jour n .

Exercice 9 – Chemins dans un réseau orienté

Un réseau de production comporte quatre postes, avec les flux $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$.

- a) Écrire la matrice d'adjacence.
- b) Existe-t-il un circuit ? De quelle longueur ?

Exercice 10 - Un marcheur sur une étoile

Un graphe « étoile » a un centre C relié à quatre sommets A_1, A_2, A_3, A_4 , sans autre arête.

- a) Déterminer la distribution invariante de la marche aléatoire simple.
- b) La marche converge-t-elle ?

Exercice 11 - Ajouter un lien change le classement

Reprenons le mini-web de l'exercice 3, de distribution invariante $(0, 3; 0, 3; 0, 3; 0, 1)$. Le webmestre de la page 4 obtient que la page 2 pointe désormais aussi vers elle. Expliquer, sans calcul complet, pourquoi son classement va s'améliorer.

Exercice 12 - Retour vers la matrice

Une marche à deux états vérifie $p_n = 0,25 + 0,55 \times 0,6^n$.

Retrouver la matrice de transition T et la valeur de p_0 .

Exercice 13 - Une file d'attente simplifiée

Un guichet est chaque minute « libre » ou « occupé ». S'il est libre, un client arrive avec la probabilité 0,3. S'il est occupé, le service se termine avec la probabilité 0,5.

- a) Quelle proportion du temps le guichet est-il occupé ?
- b) Sur une journée de 8 heures, combien de minutes d'attente cumulées cela représente-t-il ?

Exercice 14 - Comparer deux réseaux

Deux réseaux à cinq sommets sont proposés :

- réseau A : une chaîne $S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - S_5$;
- réseau B : un cycle $S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - S_5 - S_1$.

Comparer leurs distributions invariantes et leur robustesse.

Exercice 15 - Bilan : un réseau de bout en bout

Un réseau a pour arêtes AB, AC, BC, BD .

- a) Écrire la matrice d'adjacence et donner les degrés.
- b) Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 de A à D ? Les citer.
- c) Déterminer la distribution invariante de la marche aléatoire simple et dire si elle converge.