Plaquette 5 – Synthèse : réseaux, PageRank et modèles aléatoires

Graphes et marches aléatoires — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La plaquette de synthèse : chaque exercice part d'un **réseau réel** — métro, serveurs, pages web, épidémie, réseau social — et demande le trajet complet : **traduire** en graphe, écrire la matrice, **compter** des chemins ou **calculer** une distribution, puis **interpréter** le résultat dans le contexte.

Exercice 1 – Un réseau de métro

Cinq stations sont reliées : $S_1 - S_2$, $S_1 - S_3$, $S_2 - S_3$, $S_2 - S_4$, $S_3 - S_4$, $S_3 - S_5$, $S_4 - S_5$.

a) Donner les degrés et le nombre de liaisons.

b) Un voyageur circule au hasard. Quelle proportion de son temps passe-t-il dans chaque station à long terme ?

Exercice 2 – Combien d'itinéraires ?

Dans un réseau à quatre villes de matrice d'adjacence

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on donne $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Combien y a-t-il d'itinéraires de la ville 1 à la ville 4 avec exactement une correspondance ?

b) Existe-t-il une liaison directe entre 1 et 4 ?

Exercice 3 – Le PageRank d'un mini-web

Quatre pages sont liées ainsi :

— la page 1 pointe vers 2, 3 et 4 ;
— la page 2 pointe vers 1 et 3 ;
— la page 3 pointe vers 1 et 2 ;
— la page 4 pointe vers 2 et 3.

Un internaute clique au hasard sur l'un des liens de la page où il se trouve.

a) Écrire la matrice de transition.

b) Vérifier que $(0,3\,;0,3\,;0,3\,;0,1)$ est la distribution invariante et classer les pages.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Fiabilité d'un serveur

Un serveur est chaque heure « disponible » ou « saturé ». S'il est disponible, il sature l'heure suivante avec la probabilité $0,12$. S'il est saturé, il redevient disponible avec la probabilité $0,48$.

a) Déterminer le taux de disponibilité à long terme.

b) Partant d'un serveur disponible, écrire p_n et dire au bout de combien d'heures $p_n < 0,82$.

Exercice 5 – Détecter un triangle

Dans un réseau social de cinq membres, la matrice d'adjacence R vérifie : la somme des coefficients diagonaux de R^3 vaut 18, et le réseau compte 7 amitiés.

a) Combien y a-t-il de triangles d'amitié ?

b) Que vaudrait la somme des coefficients diagonaux de R^2 ?

Exercice 6 – Une épidémie à trois états

Une population est répartie en trois états : sain (S), malade (M), immunisé (I). La matrice de transition hebdomadaire est

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Toute la population est saine au départ.

a) Calculer la répartition après une semaine, puis deux.

b) Vérifier que $\left(\frac{1}{3} ; 0,4 ; \frac{4}{15}\right)$ est la distribution invariante.

Exercice 7 – Réseau vulnérable

Un réseau de cinq serveurs a pour arêtes : AB, BC, CD, DE (une chaîne).

a) Le réseau est-il connexe ?

b) Quel serveur est le plus critique ? Combien d'arêtes faudrait-il ajouter pour qu'aucune panne simple ne coupe le réseau ?

Exercice 8 – Deux modes de transport

Chaque jour, 18 % des automobilistes passent aux transports en commun, et 12 % des usagers des transports repassent à la voiture. Aujourd'hui, 70 % des habitants prennent la voiture.

a) Déterminer la répartition à long terme.

b) Écrire v_n, la proportion d'automobilistes au jour n.

Exercice 9 – Chemins dans un réseau orienté

Un réseau de production comporte quatre postes, avec les flux $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $2 \to 4$, $4 \to 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Écrire la matrice d'adjacence.

b) Existe-t-il un circuit ? De quelle longueur ?

Exercice 10 – Un marcheur sur une étoile

Un graphe « étoile » a un centre C relié à quatre sommets A_1, A_2, A_3, A_4, sans autre arête.

a) Déterminer la distribution invariante de la marche aléatoire simple.

b) La marche converge-t-elle ?

Exercice 11 – Ajouter un lien change le classement

Reprenons le mini-web de l'exercice 3, de distribution invariante $(0,3\,;0,3\,;0,3\,;0,1)$.

Le webmestre de la page 4 obtient que la page 2 pointe désormais aussi vers elle. Expliquer, sans calcul complet, pourquoi son classement va s'améliorer.

Exercice 12 – Retour vers la matrice

Une marche à deux états vérifie $p_n = 0,25 + 0,55 \times 0,6^{\,n}$.

Retrouver la matrice de transition T et la valeur de p_0.

Exercice 13 – Une file d'attente simplifiée

Un guichet est chaque minute « libre » ou « occupé ». S'il est libre, un client arrive avec la probabilité $0,3$. S'il est occupé, le service se termine avec la probabilité $0,5$.

a) Quelle proportion du temps le guichet est-il occupé ?

b) Sur une journée de 8 heures, combien de minutes d'attente cumulées cela représente-t-il ?

Exercice 14 – Comparer deux réseaux

Deux réseaux à cinq sommets sont proposés :

— réseau A : une chaîne $S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - S_5$;
— réseau B : un cycle $S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - S_5 - S_1$.

Comparer leurs distributions invariantes et leur robustesse.

Exercice 15 – Bilan : un réseau de bout en bout

Un réseau a pour arêtes AB, AC, BC, BD.

a) Écrire la matrice d'adjacence et donner les degrés.

b) Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 de A à D ? Les citer.

c) Déterminer la distribution invariante de la marche aléatoire simple et dire si elle converge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).