

Plaque 4 – Matrices de transition et états stables

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et méthodes.

- **Matrice de transition** : le coefficient de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de passer de l'état j à l'état i en une étape. Chaque **colonne** a donc pour somme 1.
- **Vecteur d'état** : X_n est la colonne des probabilités (ou des proportions) de chaque état à l'étape n ; ses coefficients sont positifs et de somme 1.
- **Évolution** :

$$X_{n+1} = PX_n \quad \text{donc} \quad X_n = P^n X_0$$

- **Lien avec l'arbre pondéré** : une colonne de P correspond aux branches issues d'un même état ; le produit PX_n est la **formule des probabilités totales**.
- **État stable** : c'est un vecteur X vérifiant $PX = X$ avec somme des coefficients égale à 1. On le trouve en résolvant ce système.
- **Convergence** : pour une transition 2×2 , la suite $p_{n+1} = ap_n + b$ obtenue est arithmético-géométrique ; $p_n - \ell$ est géométrique, où ℓ est l'état stable. La convergence a lieu dès que la raison est de valeur absolue strictement inférieure à 1.
- **État absorbant** : un état que l'on ne quitte jamais (colonne formée de 0 et d'un 1 sur sa propre ligne). À long terme, toute la masse s'y accumule.
- **Contrôle permanent** : la somme des coefficients de X_n doit rester égale à 1 (ou à l'effectif total) à chaque étape.

Correction de l'exercice 1 – Écrire une matrice de transition

a) On numérote les états : 1 = beau, 2 = pluie. Le coefficient $(i; j)$ est la probabilité d'être dans l'état i demain sachant qu'on est dans l'état j aujourd'hui.

- Colonne « beau » : 0,8 de rester beau, donc 0,2 de passer à la pluie.
- Colonne « pluie » : 0,3 de passer au beau, donc 0,7 de rester pluvieux.

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

b) Chaque colonne a pour somme 1 :

- Colonne 1 : $0,8 + 0,2 = 1$ ✓ · Colonne 2 : $0,3 + 0,7 = 1$ ✓.
- **Pourquoi c'est obligatoire** : partant d'un état donné, on aboutit forcément dans l'un des états possibles — les probabilités des branches issues d'un même nœud se somment à 1.
- **Attention à la convention** : certains manuels transposent la matrice et multiplient à droite par une **ligne**. Ici, les colonnes sont les états de départ et l'on multiplie une **colonne** à gauche par P .

Réponse. $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$, colonnes de somme 1.

Correction de l'exercice 2 - Prévoir trois jours

L'état initial est $X_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$, et l'on applique $X_{n+1} = PX_n$.

- $X_1 = \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 + 0,3 \times 0,8 \\ 0,2 \times 0,2 + 0,7 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16 + 0,24 \\ 0,04 + 0,56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$.
- $X_2 = \begin{pmatrix} 0,32 + 0,18 \\ 0,08 + 0,42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
- $X_3 = \begin{pmatrix} 0,4 + 0,15 \\ 0,1 + 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix}$.

Réponses. Les probabilités de beau temps sont 0,4 demain, 0,5 après-demain et 0,55 le troisième jour.

- **Contrôle** : à chaque étape, la somme des coefficients vaut 1 ✓.
- On observe une progression vers une valeur limite — c'est l'objet de l'exercice sur l'état stable.

Réponse. 0,4 puis 0,5 puis 0,55.

Correction de l'exercice 3 - Matrice et arbre pondéré

Par l'arbre. Deux chemins mènent à « beau demain » :

- aujourd'hui beau (0,2) puis beau demain (0,8) : probabilité $0,2 \times 0,8 = 0,16$;
- aujourd'hui pluie (0,8) puis beau demain (0,3) : probabilité $0,8 \times 0,3 = 0,24$.
- Ces deux chemins sont incompatibles, donc on additionne : $0,16 + 0,24 = 0,4$.

Par la matrice. La première ligne du produit PX_0 est exactement

$$0,8 \times 0,2 + 0,3 \times 0,8 = 0,4$$

- **Le lien** : la ligne i de P contient les probabilités d'**arriver** dans l'état i depuis chacun des états ; la multiplier par X_0 revient à appliquer la **formule des probabilités totales**.
- **L'avantage de la matrice** : l'arbre devient illisible au bout de trois ou quatre étapes, alors que $P^n X_0$ se calcule aussi facilement pour $n = 3$ que pour $n = 30$.

Réponse. $0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,3 = 0,4$: c'est la première ligne de PX_0 .

Correction de l'exercice 4 - L'état stable de la météo

On traduit $PX = X$ par un système :

$$\begin{cases} 0,8x + 0,3y = x \\ 0,2x + 0,7y = y \end{cases}$$

- Première équation : $0,3y = 0,2x$, soit $y = \frac{2}{3}x$.
- Deuxième équation : $0,2x = 0,3y$ — **la même information** : c'est normal, les deux lignes d'une matrice de transition 2×2 donnent toujours la même condition.
- C'est la condition $x + y = 1$ qui ferme le système : $x + \frac{2}{3}x = 1$, soit $\frac{5}{3}x = 1$ et $x = 0,6$.
- Donc $y = 0,4$.

$$X = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** : $0,8 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 = 0,48 + 0,12 = 0,6$ ✓ et $0,2 \times 0,6 + 0,7 \times 0,4 = 0,12 + 0,28 = 0,4$ ✓.

- **Interprétation** : à long terme, il fait beau 60 % des jours, quel que soit le temps qu'il fait aujourd'hui.

Réponse. $X = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$: 60 % de beau temps à long terme.

Correction de l'exercice 5 - Démontrer la convergence

a) La probabilité de beau le lendemain se calcule par les probabilités totales, en remarquant que la probabilité de pluie vaut $1 - p_n$:

$$— p_{n+1} = 0,8p_n + 0,3(1 - p_n) = 0,8p_n + 0,3 - 0,3p_n = 0,5p_n + 0,3.$$

b) La suite est **arithmético-géométrique**. On cherche son point fixe :

$$— \ell = 0,5\ell + 0,3 \text{ donne } 0,5\ell = 0,3, \text{ donc } \ell = 0,6 \text{ — on retrouve l'état stable } \checkmark.$$

$$— \text{On pose } q_n = p_n - 0,6 : \text{ alors } q_{n+1} = 0,5p_n + 0,3 - 0,6 = 0,5(p_n - 0,6) = 0,5q_n.$$

$$— (q_n) \text{ est géométrique de raison } 0,5, \text{ avec } q_0 = 0,2 - 0,6 = -0,4.$$

$$— \text{Donc } p_n = 0,6 - 0,4 \times 0,5^n.$$

Vérifications et limite.

$$— p_1 = 0,6 - 0,2 = 0,4 \checkmark ; p_2 = 0,6 - 0,1 = 0,5 \checkmark ; p_3 = 0,6 - 0,05 = 0,55 \checkmark \text{ — on retrouve les valeurs calculées plus haut.}$$

$$— 0 < 0,5 < 1, \text{ donc } 0,5^n \rightarrow 0 \text{ et } p_n \rightarrow 0,6 : \text{ la convergence vers l'état stable est démontrée, et elle est rapide (l'écart est divisé par deux chaque jour).}$$

Réponse. a) $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$ · b) $p_n = 0,6 - 0,4 \times 0,5^n \rightarrow 0,6$.

Correction de l'exercice 6 - Parts de marché

a) Colonne A : 85 % restent, 15 % partent. Colonne B : 10 % partent vers A, 90 % restent.

$$P = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{pmatrix}$$

b) L'état stable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie $PX = X$ et $x + y = 1$.

$$— \text{Première ligne : } 0,85x + 0,1y = x, \text{ soit } 0,1y = 0,15x, \text{ donc } y = 1,5x.$$

$$— \text{Avec } x + 1,5x = 1 : 2,5x = 1, \text{ donc } x = 0,4 \text{ et } y = 0,6.$$

$$— \text{Vérification : } 0,85 \times 0,4 + 0,1 \times 0,6 = 0,34 + 0,06 = 0,4 \checkmark.$$

Conclusion. À long terme, la marque A détient 40 % du marché et la marque B 60 %.

— **Ce qui est frappant** : cette répartition ne dépend **pas** des parts de départ. Même si A commençait avec 90 % du marché, elle descendrait vers 40 %.

— **Le levier commercial** : pour améliorer sa position, A doit réduire son taux de départ (15 %) — c'est lui qui fixe l'équilibre, bien plus que les campagnes de conquête ponctuelles.

Réponse. a) $P = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{pmatrix}$ · b) 40 % pour A, 60 % pour B.

Correction de l'exercice 7 - Disponibilité d'une machine

On note 1 = en marche, 2 = en panne.

$$P = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,45 \\ 0,05 & 0,55 \end{pmatrix}$$

$$— \text{Contrôle des colonnes : } 0,95 + 0,05 = 1 \checkmark \text{ et } 0,45 + 0,55 = 1 \checkmark.$$

État stable. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie $0,95x + 0,45y = x$ et $x + y = 1$.

- $0,45y = 0,05x$, donc $x = 9y$.
- Avec $9y + y = 1$: $y = 0,1$ et $x = 0,9$.
- **Vérification** : $0,95 \times 0,9 + 0,45 \times 0,1 = 0,855 + 0,045 = 0,9 \checkmark$.

Conclusion. Le taux de disponibilité est de 90 % : la machine fonctionne en moyenne 9 jours sur 10.

- **Lecture industrielle** : le rapport $\frac{x}{y} = \frac{0,45}{0,05} = 9$ est exactement le rapport entre le **taux de réparation** et le **taux de panne**. Doubler la rapidité des réparations ferait passer la disponibilité à $\frac{18}{19} \approx 94,7\%$.

Réponse. Taux de disponibilité de 90 % (état stable $(0,9; 0,1)$).

Correction de l'exercice 8 - Trois états

L'état initial est $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: 100 % des clients en formule E.

Après un mois : $X_1 = MX_0$ est simplement la **première colonne** de M :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,15 \\ 0,10 \end{pmatrix}$$

Après deux mois : $X_2 = MX_1$.

- Ligne E : $0,75 \times 0,75 + 0,25 \times 0,15 + 0,25 \times 0,10 = 0,5625 + 0,0375 + 0,025 = 0,625$.
- Ligne C : $0,15 \times 0,75 + 0,65 \times 0,15 + 0,15 \times 0,10 = 0,1125 + 0,0975 + 0,015 = 0,225$.
- Ligne P : $0,10 \times 0,75 + 0,10 \times 0,15 + 0,60 \times 0,10 = 0,075 + 0,015 + 0,06 = 0,15$.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,225 \\ 0,150 \end{pmatrix}$$

- **Contrôle** : $0,625 + 0,225 + 0,15 = 1 \checkmark$.
- **Lecture** : en deux mois, un quart des clients environ a quitté la formule Essentielle.

Réponse. $X_1 = (0,75; 0,15; 0,10)$ et $X_2 = (0,625; 0,225; 0,150)$.

Correction de l'exercice 9 - L'état stable à trois états

On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $MX = X$ et $x + y + z = 1$.

Le système.

- Ligne 1 : $0,75x + 0,25y + 0,25z = x$, soit $0,25(y + z) = 0,25x$, donc $x = y + z$.
- Ligne 2 : $0,15x + 0,65y + 0,15z = y$, soit $0,15(x + z) = 0,35y$.
- Condition : $x + y + z = 1$.

Résolution.

- De $x = y + z$ et $x + y + z = 1$: $2x = 1$, donc $x = 0,5$ et $y + z = 0,5$.

- Deuxième ligne : $0,15(0,5 + z) = 0,35y$ avec $y = 0,5 - z$:
- $0,075 + 0,15z = 0,175 - 0,35z$, donc $0,5z = 0,1$ et $z = 0,2$.
- Alors $y = 0,3$.

$$X = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** sur la troisième ligne :
 $0,1 \times 0,5 + 0,1 \times 0,3 + 0,6 \times 0,2 = 0,05 + 0,03 + 0,12 = 0,2 \checkmark$.
- **Conclusion** : à long terme, 50 % des clients sont en Essentielle, 30 % en Confort et 20 % en Premium — quelle que soit la répartition de départ.

Réponse. $X = (0,5 ; 0,3 ; 0,2)$.

Correction de l'exercice 10 - Un état absorbant

- a) L'état « a arrêté » ne se quitte jamais : c'est un **état absorbant**, sa colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0,1 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) La probabilité de jouer encore après n parties est $0,9^n$: il faut avoir continué n fois de suite.

- Après 3 parties : $0,9^3 = 0,729$, soit environ 73 %.
- Après 10 parties : $0,9^{10} \approx 0,349$.
- **Limite** : $0,9^n \rightarrow 0$, donc la probabilité qu'il joue encore tend vers 0 : il finit **presque sûrement** par arrêter.
- **Ce qui change par rapport aux exercices précédents** : l'état stable est ici $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et il est atteint quel que soit le point de départ. Un état absorbant « aspire » toute la masse de probabilité.

Réponse. a) $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0,1 & 1 \end{pmatrix}$ · b) 0,729 ; la limite est 0.

Correction de l'exercice 11 - Lire une puissance de la matrice

- a) Le coefficient de la ligne 1 et de la colonne 2 de P^2 est la probabilité de passer de l'état 2 (**pluie**) à l'état 1 (**beau**) en **deux** étapes.

- 0,45 est donc la probabilité qu'il fasse beau après-demain sachant qu'il pleut aujourd'hui.
- **Vérification par les chemins** : pluie $\rightarrow$ beau $\rightarrow$ beau ($0,3 \times 0,8 = 0,24$) ou pluie $\rightarrow$ pluie $\rightarrow$ beau ($0,7 \times 0,3 = 0,21$), soit $0,24 + 0,21 = 0,45 \checkmark$.

- b) On lit le coefficient (1 ; 2) de P^3 : 0,525.

- **Interprétation** : la probabilité passe de 0,3 (un jour) à 0,45 (deux jours) puis 0,525 (trois jours) : elle s'approche de 0,6, valeur de l'état stable.
- **La règle générale** : le coefficient (i ; j) de P^n est la probabilité de passer de l'état j à l'état i en n étapes — c'est pour cela que P^n contient toute l'information.

Réponse. a) probabilité d'aller de pluie à beau en deux jours · b) 0,525.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver une transition manquante

a) Chaque **colonne** doit avoir pour somme 1.

— Colonne 1 : $0,7 + b = 1$, donc $b = 0,3$.

— Colonne 2 : $a + 0,4 = 1$, donc $a = 0,6$.

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

b) L'état stable vérifie $0,7x + 0,6y = x$ avec $x + y = 1$.

— $0,6y = 0,3x$, donc $x = 2y$.

— $2y + y = 1$ donne $y = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{2}{3}$.

— **Vérification** : $0,7 \times \frac{2}{3} + 0,6 \times \frac{1}{3} = \frac{1,4 + 0,6}{3} = \frac{2}{3} \checkmark$.

— **Conclusion** : l'état stable est $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, soit environ 66,7 % et 33,3 %.

Réponse. a) $a = 0,6$ et $b = 0,3$ · b) $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 13 - Effectifs plutôt que probabilités

a) La matrice est $P = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,20 \\ 0,12 & 0,80 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \end{pmatrix}$.

— $X_1 = \begin{pmatrix} 0,88 \times 500 + 0,2 \times 300 \\ 0,12 \times 500 + 0,8 \times 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 + 60 \\ 60 + 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \end{pmatrix}$.

— La répartition **ne change pas** : (500 ; 300) est déjà l'état d'équilibre.

— $X_2 = X_1 = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \end{pmatrix}$.

b) Vérifions-le par le calcul de l'état stable, avec $x + y = 800$:

— $0,12x = 0,2y$, donc $y = 0,6x$.

— $x + 0,6x = 800$ donne $1,6x = 800$, soit $x = 500$ et $y = 300 \checkmark$.

— **Conclusion** : la salle est exactement à l'équilibre, 500 réguliers et 300 occasionnels.

— **L'intérêt de travailler en effectifs** : les calculs sont les mêmes qu'avec des probabilités, à un facteur 800 près. On vérifie simplement que le **total** reste constant à chaque étape $\checkmark$.

Réponse. a) (500 ; 300) aux deux étapes · b) l'état d'équilibre est bien (500 ; 300).

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux stratégies

a) $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$. L'état stable vérifie $0,2x = 0,1y$ avec $x + y = 1$.

— $y = 2x$, donc $3x = 1$ et $x = \frac{1}{3} \approx 33,3 \%$.

b) On refait le calcul dans les deux scénarios. L'état stable vérifie toujours

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{taux de conquête}}{\text{taux de départ}}$$

— **Stratégie 1** (départ 15 %, conquête 10 %) : $\frac{x}{y} = \frac{0,10}{0,15} = \frac{2}{3}$, donc $x = \frac{2}{5} = 40 \%$.

— **Stratégie 2** (départ 20 %, conquête 15 %) : $\frac{x}{y} = \frac{0,15}{0,20} = \frac{3}{4}$, donc $x = \frac{3}{7} \approx 42,9 \%$.

Conclusion. La seconde stratégie est légèrement plus efficace (42,9 % contre 40 %).

- **Ce que révèle la formule** : seul le **rapport** des deux taux compte. Un point gagné sur la conquête pèse ici davantage qu'un point gagné sur la fidélisation, parce que le taux de conquête est le plus petit des deux — un gain relatif plus important.

Réponse. a) $\frac{1}{3} \cdot b)$ la conquête à 15 % ($\approx 42,9\%$) l'emporte sur la fidélisation (40 %).

Correction de l'exercice 15 - Bilan : une chaîne complète

a) $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— $X_1 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$ (première colonne de P).

— $X_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 \\ 0,4 \times 0,6 + 0,7 \times 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,36 + 0,12 \\ 0,24 + 0,28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,48 \\ 0,52 \end{pmatrix}$.

b) L'état stable vérifie $0,4x = 0,3y$ avec $x + y = 1$.

— $y = \frac{4}{3}x$, donc $x + \frac{4}{3}x = 1$, soit $\frac{7}{3}x = 1$ et $x = \frac{3}{7} \approx 0,4286$.

— L'état stable est $\left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$.

c) Probabilités totales : $f_{n+1} = 0,6f_n + 0,3(1 - f_n) = 0,3f_n + 0,3$.

— Point fixe : $\ell = 0,3\ell + 0,3$ donne $0,7\ell = 0,3$, soit $\ell = \frac{3}{7} \checkmark$ — cohérent avec b).

— La suite $g_n = f_n - \frac{3}{7}$ vérifie $g_{n+1} = 0,3g_n$, avec $g_0 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

$$f_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times 0,3^n$$

— **Vérifications** : $f_1 = \frac{3}{7} + \frac{1,2}{7} = \frac{4,2}{7} = 0,6 \checkmark$ et $f_2 = \frac{3 + 0,36}{7} = \frac{3,36}{7} = 0,48 \checkmark$.

— **Limite** : $f_n \rightarrow \frac{3}{7} \approx 42,9\%$.

Réponse. a) $X_2 = (0,48; 0,52)$ · b) $\left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$ · c) $f_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times 0,3^n$.