Plaquette 3 – Suites couplées : expression explicite et limites

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthodes pour les suites couplées.

— **Écriture matricielle** : le système $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, d'où $X_n = A^n X_0$.

— **Méthode de la combinaison géométrique** : on cherche des réels α, β tels que la suite $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ vérifie $w_{n+1} = q\,w_n$. Elle est alors géométrique, donc $w_n = w_0\,q^n$.

$$w_{n+1} = q\,w_n \quad \Longrightarrow \quad w_n = w_0\,q^n$$

— **Les deux candidats à essayer d'abord** : $s_n = u_n + v_n$ (souvent constante ou géométrique dans les modèles de répartition) et $d_n = u_n - v_n$.

— **Retour à u_n et v_n** : deux combinaisons géométriques indépendantes forment un système 2×2 que l'on résout.

— **Limites** : $q^n \to 0$ si $|q| < 1$; $q^n \to +\infty$ si $q > 1$; la suite diverge en oscillant si $q \leq -1$.

— **Conservation** : si $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$, le total est constant — c'est le cas des modèles de **répartition** (population qui se déplace, clients qui changent d'offre).

— **Contrôle** : on vérifie toujours l'expression explicite trouvée sur $n = 0$ et $n = 1$.

Correction de l'exercice 1 – Écrire et calculer

a) On lit les coefficients ligne par ligne :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— La relation $X_{n+1} = AX_n$ donne, par récurrence, $X_n = A^n X_0$.

b) On applique la relation deux fois de suite :

— $u_1 = 4 \times 3 - 2 \times 1 = 10$ et $v_1 = 3 + 1 = 4$.

— $u_2 = 4 \times 10 - 2 \times 4 = 32$ et $v_2 = 10 + 4 = 14$.

Vérification matricielle.

— $A^2 = \begin{pmatrix} 16-2 & -8-2 \\ 4+1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, et $A^2 X_0 = \begin{pmatrix} 42-10 \\ 15-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \end{pmatrix}$ ✓.

— **Le piège de calcul** : ne pas utiliser u_1 déjà actualisé pour calculer v_1. Les deux valeurs se calculent **à partir du même rang** n.

Réponse. a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ · b) $(10\,;4)$ puis $(32\,;14)$.

Correction de l'exercice 2 – Deux combinaisons géométriques

a) On calcule t_{n+1} en remplaçant par les expressions du système :

— $t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = (4u_n - 2v_n) - (u_n + v_n) = 3u_n - 3v_n = 3(u_n - v_n)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Donc $t_{n+1} = 3t_n$: (t_n) est **géométrique de raison** 3, avec $t_0 = 3 - 1 = 2$.
— D'où $t_n = 2 \times 3^n$.

b) De même pour w_n :

— $w_{n+1} = u_{n+1} - 2v_{n+1} = (4u_n - 2v_n) - 2(u_n + v_n) = 2u_n - 4v_n = 2(u_n - 2v_n)$.
— Donc $w_{n+1} = 2w_n$: (w_n) est **géométrique de raison** 2, avec $w_0 = 3 - 2 = 1$.
— D'où $w_n = 2^n$.

Contrôles au rang 1.

— $t_1 = 10 - 4 = 6 = 2 \times 3$ ✓ · $w_1 = 10 - 8 = 2 = 2^1$ ✓.
— **Comment on trouve ces combinaisons** : on cherche α tel que $u_n - \alpha v_n$ soit géométrique ; le calcul conduit à une équation du second degré en α, dont les racines donnent les deux bonnes valeurs (1 et 2 ici).

Réponse. a) $t_n = 2 \times 3^n$ · b) $w_n = 2^n$.

Correction de l'exercice 3 – Expressions explicites

On dispose d'un système de deux équations à deux inconnues u_n et v_n :

$$\begin{cases} u_n - v_n = 2 \times 3^n \\ u_n - 2v_n = 2^n \end{cases}$$

Résolution.

— Par différence (première moins seconde) : $v_n = 2 \times 3^n - 2^n$.
— On reporte : $u_n = v_n + 2 \times 3^n = 4 \times 3^n - 2^n$.

Vérifications.

— $n = 0$: $u_0 = 4 - 1 = 3$ ✓ et $v_0 = 2 - 1 = 1$ ✓.
— $n = 1$: $u_1 = 12 - 2 = 10$ ✓ et $v_1 = 6 - 2 = 4$ ✓.
— $n = 2$: $u_2 = 36 - 4 = 32$ ✓ et $v_2 = 18 - 4 = 14$ ✓.
— **Limites** : 3^n l'emporte sur 2^n, donc $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$, avec $\frac{u_n}{v_n} \to 2$ — les deux suites finissent dans un rapport de 2.

Réponse. $u_n = 4 \times 3^n - 2^n$ et $v_n = 2 \times 3^n - 2^n$.

Correction de l'exercice 4 – Somme et différence

a) **Somme** : $s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n + 3a_n + b_n}{2} = \dfrac{4a_n + 4b_n}{2} = 2s_n$.

— (s_n) est géométrique de raison 2, avec $s_0 = 6$: donc $s_n = 6 \times 2^n$.

Différence : $d_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n - 3a_n - b_n}{2} = \dfrac{-2a_n + 2b_n}{2} = -(a_n - b_n) = -d_n$.

— (d_n) est géométrique de raison -1, avec $d_0 = 4$: donc $d_n = 4 \times (-1)^n$.

b) On résout le système $\begin{cases} a_n + b_n = 6 \times 2^n \\ a_n - b_n = 4 \times (-1)^n \end{cases}$:

$$a_n = 3 \times 2^n + 2 \times (-1)^n \qquad b_n = 3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n$$

— **Vérification** : $n = 0$ donne $a_0 = 3 + 2 = 5$ ✓ et $b_0 = 3 - 2 = 1$ ✓.
— $n = 1$: $a_1 = 6 - 2 = 4$ et le calcul direct donne $\frac{5+3}{2} = 4$ ✓ ; $b_1 = 6 + 2 = 8$ et $\frac{15+1}{2} = 8$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Comportement** : le terme en $(-1)^n$ reste borné, donc les deux suites se comportent comme 3×2^n et tendent vers $+\infty$.

Réponse. a) raisons 2 et -1 · b) $a_n = 3 \times 2^n + 2(-1)^n$, $b_n = 3 \times 2^n - 2(-1)^n$.

Correction de l'exercice 5 – Un modèle de répartition

a) On note u_n et v_n les volumes (en litres) des bassins A et B après n minutes.

— A garde 90 % de son contenu et reçoit 30 % de B : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,3v_n$.
— B garde 70 % et reçoit 10 % de A : $v_{n+1} = 0,1u_n + 0,7v_n$.

Conservation du total :

— $u_{n+1} + v_{n+1} = (0,9 + 0,1)u_n + (0,3 + 0,7)v_n = u_n + v_n$.
— Le volume total reste donc égal à 160 L à chaque instant ✓ — ce qui est rassurant : l'eau ne s'évapore pas.

b) $u_1 = 0,9 \times 100 + 0,3 \times 60 = 90 + 18 = 108$ L.

— $v_1 = 0,1 \times 100 + 0,7 \times 60 = 10 + 42 = 52$ L.
— **Contrôle** : $108 + 52 = 160$ L ✓.

Réponse. a) $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,3v_n$, $v_{n+1} = 0,1u_n + 0,7v_n$, total constant 160 L · b) 108 L et 52 L.

Correction de l'exercice 6 – Vers l'équilibre des bassins

a) On calcule w_{n+1} :

— $w_{n+1} = u_{n+1} - 3v_{n+1} = (0,9u_n + 0,3v_n) - 3(0,1u_n + 0,7v_n)$.
— $= 0,9u_n + 0,3v_n - 0,3u_n - 2,1v_n = 0,6u_n - 1,8v_n = 0,6(u_n - 3v_n)$.
— Donc $w_{n+1} = 0,6\,w_n$: la suite est géométrique de raison $0,6$, avec $w_0 = 100 - 180 = -80$.
— D'où $w_n = -80 \times 0,6^n$.

b) On combine avec la conservation $u_n + v_n = 160$, c'est-à-dire $v_n = 160 - u_n$:

— $w_n = u_n - 3(160 - u_n) = 4u_n - 480$.
— Donc $4u_n = 480 + w_n$, soit $u_n = 120 - 20 \times 0,6^n$, et $v_n = 40 + 20 \times 0,6^n$.
— **Vérifications** : $u_0 = 120 - 20 = 100$ ✓ ; $u_1 = 120 - 12 = 108$ ✓ ; $v_1 = 40 + 12 = 52$ ✓.

Limites. Comme $0 < 0,6 < 1$, on a $0,6^n \to 0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 120 \qquad \lim_{n \to +\infty} v_n = 40$$

— **Interprétation** : les volumes se stabilisent à 120 L et 40 L, dans le rapport 3 pour 1 — exactement l'inverse du rapport des taux de fuite (10 % contre 30 %).

Réponse. a) $w_n = -80 \times 0,6^n$ · b) $u_n = 120 - 20 \times 0,6^n \to 120$ et $v_n \to 40$.

Correction de l'exercice 7 – Deux offres d'abonnement

a) $u_{n+1} = 0,8u_n + 0,3v_n$ et $v_{n+1} = 0,2u_n + 0,7v_n$, avec $u_0 = 100$ et $v_0 = 400$.

— $u_1 = 80 + 120 = 200$ et $v_1 = 20 + 280 = 300$.
— Contrôle : $200 + 300 = 500$ ✓, le parc total est conservé.

b) $w_{n+1} = 2u_{n+1} - 3v_{n+1} = 2(0,8u_n + 0,3v_n) - 3(0,2u_n + 0,7v_n)$.

— $= 1,6u_n + 0,6v_n - 0,6u_n - 2,1v_n = u_n - 1,5v_n = 0,5(2u_n - 3v_n) = 0,5\,w_n$ ✓.
— $w_0 = 200 - 1\,200 = -1\,000$, donc $w_n = -1\,000 \times 0,5^n$.

Expression de u_n. Avec $v_n = 500 - u_n$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $w_n = 2u_n - 3(500 - u_n) = 5u_n - 1\,500$.
— Donc $u_n = 300 + \dfrac{w_n}{5} = 300 - 200 \times 0,5^n$.
— **Vérifications** : $u_0 = 300 - 200 = 100$ ✓ ; $u_1 = 300 - 100 = 200$ ✓ ; $u_2 = 300 - 50 = 250$, et le calcul direct donne $0,8 \times 200 + 0,3 \times 300 = 160 + 90 = 250$ ✓.
— **Limite** : $u_n \to 300$ et $v_n \to 200$. L'offre A finira par regrouper 60 % du parc.

Réponse. a) $(200\,;300)$ · b) $u_n = 300 - 200 \times 0,5^n \to 300$.

Correction de l'exercice 8 – Une suite d'ordre 2 déguisée

a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$. La relation donne

$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_{n+1} = a_{n+1} \end{cases} \quad \text{donc} \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$$

— Toute récurrence **d'ordre 2** se ramène ainsi à une récurrence d'ordre 1 sur un couple.

b) On cherche les combinaisons géométriques : posons $t_n = a_{n+1} - 2a_n$.

— $t_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5a_{n+1} - 6a_n - 2a_{n+1} = 3a_{n+1} - 6a_n = 3(a_{n+1} - 2a_n) = 3t_n$.
— $t_0 = a_1 - 2a_0 = 1$, donc $t_n = 3^n$.
— De même, $r_n = a_{n+1} - 3a_n$ vérifie $r_{n+1} = 2r_n$ et $r_0 = 1$, donc $r_n = 2^n$.
— Par différence : $t_n - r_n = (a_{n+1} - 2a_n) - (a_{n+1} - 3a_n) = a_n$.
— Donc $a_n = 3^n - 2^n$.
— **Vérifications** : $a_0 = 1 - 1 = 0$ ✓ ; $a_1 = 3 - 2 = 1$ ✓ ; $a_2 = 9 - 4 = 5$, et la récurrence donne $5 \times 1 - 6 \times 0 = 5$ ✓.

Réponse. a) $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$ · b) $a_n = 3^n - 2^n$.

Correction de l'exercice 9 – Croissance de deux espèces

a) On utilise la somme et la différence.

— $s_n = x_n + y_n$ vérifie $s_{n+1} = 3x_n + 3y_n = 3s_n$, avec $s_0 = 50$: donc $s_n = 50 \times 3^n$.
— $d_n = x_n - y_n$ vérifie $d_{n+1} = x_n - y_n = d_n$, avec $d_0 = 30$: la suite est **constante**, $d_n = 30$.
— On résout : $x_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} = 25 \times 3^n + 15$ et $y_n = 25 \times 3^n - 15$.
— **Vérification** : $x_0 = 25 + 15 = 40$ ✓, $y_0 = 25 - 15 = 10$ ✓ ; $x_1 = 75 + 15 = 90$ et le calcul direct donne $80 + 10 = 90$ ✓.

b) On factorise par le terme dominant :

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{25 \times 3^n + 15}{25 \times 3^n - 15} = \frac{1 + \dfrac{15}{25 \times 3^n}}{1 - \dfrac{15}{25 \times 3^n}}$$

— Comme $3^n \to +\infty$, les deux fractions tendent vers 0, donc $\dfrac{x_n}{y_n} \to 1$.
— **Interprétation** : les deux populations explosent, mais l'écart de 30 milliers devient négligeable devant leur taille : elles **s'égalisent en proportion**.

Réponse. a) $x_n = 25 \times 3^n + 15$, $y_n = 25 \times 3^n - 15$ · b) le rapport tend vers 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Deux comptes et un virement

a) Chaque compte est d'abord multiplié par $1,02$, puis le virement s'applique :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1,02\,a_n - 500 \\ b_{n+1} = 1,02\,b_n + 500 \end{cases}$$

— Les deux suites ne sont **pas couplées** ici : chacune est **arithmético-géométrique**, et se traite séparément.

b) On cherche le point fixe ℓ de $a_{n+1} = 1,02a_n - 500$:

— $\ell = 1,02\ell - 500$ donne $0,02\ell = 500$, donc $\ell = 25\,000$.
— On pose $c_n = a_n - 25\,000$: alors
$c_{n+1} = 1,02a_n - 500 - 25\,000 = 1,02\,(a_n - 25\,000) = 1,02\,c_n$.
— (c_n) est géométrique de raison $1,02$, avec $c_0 = 10\,000 - 25\,000 = -15\,000$.
— Donc $a_n = 25\,000 - 15\,000 \times 1,02^{\,n}$.

Vérifications et interprétation.

— $a_0 = 25\,000 - 15\,000 = 10\,000$ € ✓ ; $a_1 = 25\,000 - 15\,300 = 9\,700$ €, et le calcul direct donne $10\,200 - 500 = 9\,700$ € ✓.
— Comme $1,02^{\,n} \to +\infty$, la suite a_n tend vers $-\infty$: le compte A finit par se vider. On cherche le premier n tel que $a_n < 0$: $1,02^{\,n} > \dfrac{5}{3}$, soit $n > \dfrac{\ln(5/3)}{\ln 1,02} \approx 25,8$, donc au bout de 26 **ans**.

Réponse. a) $a_{n+1} = 1,02a_n - 500$ · b) $a_n = 25\,000 - 15\,000 \times 1,02^{\,n}$, compte vide au bout de 26 ans.

Correction de l'exercice 11 – Trouver la bonne combinaison

On écrit la condition et on identifie.

— $w_{n+1} = u_{n+1} + \alpha v_{n+1} = (3u_n + v_n) + \alpha(2u_n + 2v_n) = (3 + 2\alpha)u_n + (1 + 2\alpha)v_n$.
— Pour que $w_{n+1} = q\,w_n = q\,u_n + q\alpha\,v_n$, il faut

$$\begin{cases} 3 + 2\alpha = q \\ 1 + 2\alpha = q\alpha \end{cases}$$

— On substitue q : $1 + 2\alpha = (3 + 2\alpha)\alpha = 3\alpha + 2\alpha^2$.
— D'où $2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$.
— Racines : $\alpha = \dfrac{-1-3}{4} = -1$ et $\alpha = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Les deux combinaisons obtenues.

— Pour $\alpha = -1$: $q = 3 - 2 = 1$, donc $u_n - v_n$ est **constante**.
— Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$: $q = 3 + 1 = 4$, donc $u_n + \dfrac{1}{2}v_n$ est géométrique de raison 4.
— **Vérification** avec $u_0 = 1$, $v_0 = 0$: $u_1 = 3$, $v_1 = 2$; $u_1 - v_1 = 1 = u_0 - v_0$ ✓ et $u_1 + \dfrac{v_1}{2} = 4 = 4 \times 1$ ✓.
— **Ce que sont ces nombres** : $q = 1$ et $q = 4$ sont les **valeurs propres** de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, notion étudiée après le baccalauréat.

Réponse. $\alpha = -1$ (raison 1) et $\alpha = \dfrac{1}{2}$ (raison 4).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Un système qui se stabilise

a) On applique les relations :

— $u_1 = 0,5 \times 10 + 0 + 3 = 8$ et $v_1 = 0,5 \times 10 + 0 = 5$.

— $u_2 = 0,5 \times 8 + 0,2 \times 5 + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$ et $v_2 = 0,5 \times 8 + 0,8 \times 5 = 4 + 4 = 8$.

b) Un couple **stationnaire** vérifie $u_{n+1} = u_n = \ell$ et $v_{n+1} = v_n = m$:

$$\begin{cases} \ell = 0,5\ell + 0,2m + 3 \\ m = 0,5\ell + 0,8m \end{cases}$$

— La seconde équation donne $0,2m = 0,5\ell$, soit $m = 2,5\ell$.

— On reporte dans la première : $\ell = 0,5\ell + 0,5\ell + 3$, soit $\ell = \ell + 3$.

— On obtient $0 = 3$: **il n'existe aucun couple stationnaire**.

Interprétation.

— Le terme constant +3 injecte en permanence de la matière dans le système, sans qu'aucune sortie ne l'équilibre : les suites ne peuvent pas se stabiliser.

— Le calcul le confirme : $u_3 = 4 + 1,6 + 3 = 8,6$ et $v_3 = 4 + 6,4 = 10,4$, et les valeurs continuent de croître.

— **La morale** : chercher un état stationnaire est le premier réflexe, mais il faut accepter la conclusion « il n'y en a pas » quand le système est ouvert.

Réponse. a) $(8\,;5)$ puis $(8\,;8)$ · b) aucun couple stationnaire (on aboutit à $0 = 3$).

Correction de l'exercice 13 – Migration entre deux régions

a) $u_{n+1} = 0,95u_n + 0,15v_n$ et $v_{n+1} = 0,05u_n + 0,85v_n$, avec $u_0 = 2$ et $v_0 = 6$ (en millions).

— Le total est conservé : $u_n + v_n = 8$ millions pour tout n ✓.

b) $w_{n+1} = (0,95u_n + 0,15v_n) - 3(0,05u_n + 0,85v_n)$.

— $= 0,95u_n + 0,15v_n - 0,15u_n - 2,55v_n = 0,8u_n - 2,4v_n = 0,8(u_n - 3v_n)$.

— Donc $w_{n+1} = 0,8\,w_n$: géométrique de raison $0,8$, avec $w_0 = 2 - 18 = -16$.

— $w_n = -16 \times 0,8^n$.

Expression de u_n. Avec $v_n = 8 - u_n$:

— $w_n = u_n - 3(8 - u_n) = 4u_n - 24$, donc $u_n = 6 + \dfrac{w_n}{4} = 6 - 4 \times 0,8^n$.

— **Vérifications** : $u_0 = 6 - 4 = 2$ ✓ ; $u_1 = 6 - 3,2 = 2,8$, et le calcul direct donne $1,9 + 0,9 = 2,8$ ✓.

— **Limite** : $u_n \to 6$ et $v_n \to 2$ millions. La région R_1 finira par concentrer les trois quarts de la population, malgré son handicap initial.

Réponse. a) $u_{n+1} = 0,95u_n + 0,15v_n$ · b) $u_n = 6 - 4 \times 0,8^n \to 6$ millions.

Correction de l'exercice 14 – Décroissance couplée

a) On utilise la somme et la différence.

— $s_n = u_n + v_n$: $s_{n+1} = 0,6u_n + 0,6v_n = 0,6s_n$, avec $s_0 = 100$, donc $s_n = 100 \times 0,6^n$.

— $d_n = u_n - v_n$: $d_{n+1} = 0,4u_n - 0,4v_n = 0,4d_n$, avec $d_0 = 60$, donc $d_n = 60 \times 0,4^n$.

— On résout : $u_n = 50 \times 0,6^n + 30 \times 0,4^n$ et $v_n = 50 \times 0,6^n - 30 \times 0,4^n$.

— **Vérifications** : $u_0 = 50 + 30 = 80$ ✓, $v_0 = 20$ ✓ ; $u_1 = 30 + 12 = 42$ et le direct donne $40 + 2 = 42$ ✓.

b) $0,6^n \to 0$ et $0,4^n \to 0$, donc $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Les deux réservoirs se **vident complètement** : à chaque étape, 40 % du total disparaît (le reste circule entre les deux).
— **Contrôle de cohérence** : $u_n + v_n = 100 \times 0,6^n$ décroît bien géométriquement, et $v_n \geq 0$ car $50 \times 0,6^n \geq 30 \times 0,4^n$ pour tout $n \geq 0$ ✓.

Réponse. a) $u_n = 50 \times 0,6^n + 30 \times 0,4^n$, $v_n = 50 \times 0,6^n - 30 \times 0,4^n$ · b) les deux tendent vers 0.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : un système complet

a) $s_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n + u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{4u_n + 4v_n}{4} = u_n + v_n = s_n$.

— La suite est **constante**, égale à $s_0 = 8$: le total se conserve.

b) $d_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n - u_n - 3v_n}{4} = \dfrac{2u_n - 2v_n}{4} = \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$.

— (d_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, avec $d_0 = 2 - 6 = -4$.

— Donc $d_n = -4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) On résout le système $\begin{cases} u_n + v_n = 8 \\ u_n - v_n = -4 \times 0,5^n \end{cases}$:

$$u_n = 4 - 2 \times 0,5^n \qquad v_n = 4 + 2 \times 0,5^n$$

— **Vérifications** : $u_0 = 4 - 2 = 2$ ✓, $v_0 = 6$ ✓ ; $u_1 = 4 - 1 = 3$, et le calcul direct donne $\dfrac{6+6}{4} = 3$ ✓.
— **Limites** : $0,5^n \to 0$, donc $u_n \to 4$ et $v_n \to 4$.
— **Interprétation** : chaque étape « moyenne » les deux valeurs ; elles convergent vers la moyenne commune $\dfrac{8}{2} = 4$, en se rapprochant deux fois plus vite à chaque tour.

Réponse. a) $s_n = 8$ · b) raison $\dfrac{1}{2}$ · c) $u_n = 4 - 2 \times 0,5^n \to 4$ et $v_n = 4 + 2 \times 0,5^n \to 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).