Plaquette 2 – Systèmes linéaires 3 × 3 : résolution et discussion

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthodes de résolution.

— **Écriture matricielle** : tout système linéaire de trois équations à trois inconnues s'écrit $AX = B$, avec A la matrice 3×3 des coefficients.

— **Méthode du pivot** : on combine les lignes ($L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, etc.) pour faire disparaître une inconnue, puis une deuxième ; on obtient une équation à une inconnue, et l'on **remonte**.

— **Résolution par l'inverse** : si A^{-1} est connue (ou donnée par l'énoncé), alors $X = A^{-1}B$ — méthode imbattable lorsque plusieurs seconds membres se succèdent.

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \qquad (\det A \neq 0)$$

— **Trois situations possibles** :

— $\det A \neq 0$: **une** solution, quel que soit B ;

— $\det A = 0$ et système **compatible** : une infinité de solutions, que l'on décrit avec un paramètre ;

— $\det A = 0$ et système **incompatible** : aucune solution.

— **Détecter la dépendance** : si une ligne de A est combinaison des autres, le déterminant est nul. Le système n'a alors de solution que si le second membre vérifie **la même** combinaison.

— **Vérification obligatoire** : on remplace la solution trouvée dans les **trois** équations de départ.

— **Retour au contexte** : un effectif ou un prix négatif signale une erreur, ou un problème mal posé.

Correction de l'exercice 1 – Résoudre par le pivot

Étape 1 : éliminer x en combinant avec la première ligne.

— $L_2 - 2L_1$: $(2x - 2x) + (-y - 2y) + (z - 2z) = 3 - 12$, soit $-3y - z = -9$, c'est-à-dire $3y + z = 9$.

— $L_3 - L_1$: $y - 4z = -10$.

Étape 2 : éliminer y**.**

— De la première relation : $z = 9 - 3y$.

— On reporte : $y - 4(9 - 3y) = -10$, soit $y - 36 + 12y = -10$, donc $13y = 26$ et $y = 2$.

Étape 3 : remonter.

— $z = 9 - 3 \times 2 = 3$.

— $x = 6 - y - z = 6 - 2 - 3 = 1$.

Vérification dans les trois équations.

— $1 + 2 + 3 = 6$ ✓ ; $2 - 2 + 3 = 3$ ✓ ; $1 + 4 - 9 = -4$ ✓.

— **Conclusion** : $(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)$, solution unique.

Réponse. $(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Un second système

Étape 1 : éliminer z, qui a les coefficients les plus simples.

— $L_1 + L_3$: $5x + 0y + 0z = 10$, donc $5x = 10$ et $x = 2$ — un coup de chance qu'il faut savoir voir.

— $2L_1 + L_2$: $5x + 5y + 0z = 15$, donc $x + y = 3$.

Étape 2 : conclure.

— $x = 2$, donc $y = 3 - 2 = 1$.

— On reporte dans la première équation : $4 + 1 - z = 6$, donc $z = -1$.

Vérification.

— $4 + 1 + 1 = 6$ ✓ ; $2 + 3 - 2 = 3$ ✓ ; $6 - 1 - 1 = 4$ ✓.

— **Conclusion** : $(x\,;y\,;z) = (2\,;1\,;-1)$.

— **Le conseil de méthode** : avant de lancer le pivot mécaniquement, on regarde si une **somme** ou une **différence** de deux lignes fait disparaître deux inconnues d'un coup.

Réponse. $(x\,;y\,;z) = (2\,;1\,;-1)$.

Correction de l'exercice 3 – Utiliser une inverse fournie

a) On vérifie la **première colonne** de AA^{-1}, en multipliant chaque ligne de A par la première colonne de A^{-1}, divisée par 6 :

— Ligne 1 : $\frac{1}{6}(1 \times 18 + 1 \times (-18) + 1 \times 6) = \frac{6}{6} = 1$ ✓.

— Ligne 2 : $\frac{1}{6}(18 - 36 + 18) = 0$ ✓.

— Ligne 3 : $\frac{1}{6}(18 - 72 + 54) = 0$ ✓.

— On obtient bien $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, première colonne de I_3.

b) $X = A^{-1}B$ avec $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{pmatrix}$:

— Ligne 1 : $\frac{1}{6}(18 \times 6 - 15 \times 14 + 3 \times 36) = \frac{108 - 210 + 108}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

— Ligne 2 : $\frac{1}{6}(-108 + 336 - 216) = \frac{12}{6} = 2$.

— Ligne 3 : $\frac{1}{6}(36 - 126 + 108) = \frac{18}{6} = 3$.

— **Vérification** : $1 + 2 + 3 = 6$ ✓ ; $1 + 4 + 9 = 14$ ✓ ; $1 + 8 + 27 = 36$ ✓.

— **Conclusion** : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Réponse. b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 – La même matrice, un autre second membre

On réutilise A^{-1} **sans aucun nouveau calcul d'inverse** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Ligne 1 : $\frac{1}{6}(18 \times 3 - 15 \times 8 + 3 \times 22) = \frac{54 - 120 + 66}{6} = 0$.
— Ligne 2 : $\frac{1}{6}(-54 + 192 - 132) = \frac{6}{6} = 1$.
— Ligne 3 : $\frac{1}{6}(18 - 72 + 66) = \frac{12}{6} = 2$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $0 + 1 + 2 = 3$ ✓ ; $0 + 2 + 6 = 8$ ✓ ; $0 + 4 + 18 = 22$ ✓.
— **L'avantage** : l'inverse se calcule **une seule fois** et résout ensuite tous les systèmes de même matrice. Avec le pivot, il faudrait tout recommencer à chaque second membre.
— C'est exactement la situation d'une entreprise qui refait le même calcul chaque semaine avec de nouvelles commandes.

Réponse. $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; l'inverse sert pour tous les seconds membres.

Correction de l'exercice 5 – Une infinité de solutions

a) On teste la combinaison $L_2 - 2L_1$:

— $(3x - 2x) + (2y - 2y) + (z - 2z) = 170 - 200$, soit $x - z = -30$.
— C'est **exactement** la troisième équation : $L_3 = L_2 - 2L_1$.
— La troisième équation n'apporte donc aucune information nouvelle, et le déterminant de la matrice du système est nul.

b) Le système se réduit à deux équations indépendantes. On choisit z comme **paramètre**.

— L_3 : $x = z - 30$.
— L_1 : $y = 100 - x - z = 100 - (z - 30) - z = 130 - 2z$.
— L'ensemble des solutions est $\{(z - 30\,;\, 130 - 2z\,;\, z),\ z \in \mathbb{R}\}$: il y en a une **infinité**.

Vérifications.

— Pour $z = 50$: $(20\,;30\,;50)$, et $20 + 30 + 50 = 100$ ✓, $60 + 60 + 50 = 170$ ✓, $20 - 50 = -30$ ✓.
— Pour $z = 40$: $(10\,;50\,;40)$, qui convient également ✓.
— **Géométriquement** : les trois plans d'équations se coupent selon une **droite**, et non en un point unique.

Réponse. a) $L_3 = L_2 - 2L_1$ · b) $(z - 30\,;\, 130 - 2z\,;\, z),\ z \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 – Aucune solution

La combinaison des lignes doit être **compatible** avec les seconds membres.

— On a vu que $L_2 - 2L_1$ donne $x - z = 170 - 200 = -30$.
— Or la troisième équation impose $x - z = 0$.
— Un même nombre devrait valoir -30 et 0 : **impossible**.

Conclusion. Le système n'a aucune solution.

— **Le critère général** : quand une ligne de la matrice est combinaison des autres ($\det A = 0$), le système n'a de solution que si le **second membre** vérifie la même combinaison. Ici $170 - 2 \times 100 = -30 \neq 0$: la compatibilité échoue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Géométriquement** : les trois plans n'ont aucun point commun — deux d'entre eux se coupent selon une droite parallèle au troisième.
— **À comparer** avec l'exercice précédent : même matrice, même déterminant nul, mais un second membre compatible donnait une infinité de solutions. Le déterminant seul ne suffit donc pas à conclure.

Réponse. $L_2 - 2L_1$ impose $x - z = -30$, incompatible avec $x - z = 0$: aucune solution.

Correction de l'exercice 7 – Un paramètre dans le système

a) On exprime tout en fonction de z à l'aide des deux premières équations.

— L_2 : $y = 5 - z$.
— L_1 : $x = 3 - y = 3 - (5 - z) = z - 2$.
— On reporte dans L_3 : $(z - 2) + mz = 1$, soit $(1 + m)z = 3$.

Si $m \neq -1$: $z = \dfrac{3}{1+m}$, puis

$$x = \frac{3}{1+m} - 2 \qquad y = 5 - \frac{3}{1+m}$$

— Exemple avec $m = 2$: $z = 1$, $x = -1$, $y = 4$. Vérification : $-1 + 4 = 3$ ✓, $4 + 1 = 5$ ✓, $-1 + 2 = 1$ ✓.

b) **Si** $m = -1$: l'équation devient $0 \times z = 3$, ce qui est impossible.

— Le système n'a alors **aucune solution**.
— **Conclusion** : le système a une solution unique pour tout $m \neq -1$, et aucune solution pour $m = -1$.
— **Lecture par le déterminant** : celui de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ vaut $m + 1$, qui s'annule précisément en $m = -1$.

Réponse. a) $z = \dfrac{3}{1+m}$, $x = z - 2$, $y = 5 - z$ · b) $m = -1$: aucune solution.

Correction de l'exercice 8 – Une recette à doser

On note x, y, z les masses (en grammes) des farines A, B, C.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x - y + 2z = 20 \\ 2x + y - z = 90 \end{cases}$$

Résolution.

— $L_1 + L_2$: $2x + 3z = 120$.
— $L_2 + L_3$: $3x + z = 110$.
— De la seconde : $z = 110 - 3x$. On reporte : $2x + 330 - 9x = 120$, soit $-7x = -210$ et $x = 30$.
— $z = 110 - 90 = 20$, puis $y = 100 - 30 - 20 = 50$.

Vérification dans les trois équations.

— $30 + 50 + 20 = 100$ ✓ ; $30 - 50 + 40 = 20$ ✓ ; $60 + 50 - 20 = 90$ ✓.
— **Conclusion** : 30 g de farine A, 50 g de B et 20 g de C.
— **Contrôle de bon sens** : les trois masses sont positives et leur somme fait bien 100 g ✓.

Réponse. 30 g de A, 50 g de B, 20 g de C.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Trois tarifs de cinéma

On note a, e, s les trois tarifs (en euros).

$$\begin{cases} 2a + 3e + s = 40 \\ a + e + 2s = 28 \\ 3a + 2e = 37 \end{cases}$$

Étape 1 : éliminer s, absent de la troisième équation.

— $2L_1 - L_2$: $(4a - a) + (6e - e) + (2s - 2s) = 80 - 28$, soit $3a + 5e = 52$.

Étape 2 : utiliser la troisième équation.

— L_3 donne $3a + 2e = 37$. Par différence : $3e = 52 - 37 = 15$, donc $e = 5$.
— $3a = 37 - 10 = 27$, donc $a = 9$.
— L_2 : $9 + 5 + 2s = 28$, donc $2s = 14$ et $s = 7$.

Vérification dans les trois relevés.

— $2 \times 9 + 3 \times 5 + 7 = 18 + 15 + 7 = 40$ € ✓.
— $9 + 5 + 14 = 28$ € ✓ · $27 + 10 = 37$ € ✓.
— **Conclusion** : 9 € plein tarif, 5 € enfant, 7 € senior — des montants cohérents avec une vraie grille de prix.

Réponse. Adulte 9 €, enfant 5 €, senior 7 €.

Correction de l'exercice 10 – Un circuit électrique

On substitue la première équation dans les deux autres.

— Deuxième équation : $(i_2 + i_3) + 2i_2 = 14$, soit $3i_2 + i_3 = 14$.
— Troisième équation : $(i_2 + i_3) + 4i_3 = 14$, soit $i_2 + 5i_3 = 14$.

Résolution du système 2×2**.**

— De la première : $i_3 = 14 - 3i_2$.
— On reporte : $i_2 + 5(14 - 3i_2) = 14$, soit $i_2 + 70 - 15i_2 = 14$.
— $-14i_2 = -56$, donc $i_2 = 4$, puis $i_3 = 14 - 12 = 2$ et $i_1 = 4 + 2 = 6$.

Vérification.

— Loi des nœuds : $6 = 4 + 2$ ✓.
— Première maille : $6 + 2 \times 4 = 14$ V ✓ · Seconde maille : $6 + 4 \times 2 = 14$ V ✓.
— **Cohérence physique** : la branche de résistance 2 Ω reçoit deux fois plus de courant que celle de 4 Ω ✓ — le courant privilégie le chemin le moins résistant.

Réponse. $i_1 = 6$ A, $i_2 = 4$ A, $i_3 = 2$ A.

Correction de l'exercice 11 – Trois plans dans l'espace

Chercher l'intersection des trois plans, c'est résoudre le système formé par leurs trois équations — c'est exactement le système du premier exercice.

— Sa solution unique est $(1\,;2\,;3)$.

Interprétation géométrique.

— Les trois plans se coupent en **un seul point**, $M(1\,;2\,;3)$.
— C'est le cas « générique » : trois plans en position quelconque se coupent en un point, comme trois murs d'une pièce se rejoignent en un coin.
— **Les autres configurations possibles**, toutes liées à un déterminant nul :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— intersection selon une **droite** (les trois plans contiennent une même droite) ;
— intersection **vide** (deux plans parallèles, ou une « gouttière » à trois plans) ;
— intersection égale à un **plan** entier (les trois équations décrivent le même plan).
— **Vérification** que M appartient bien aux trois plans : $1+2+3=6$ ✓, $2-2+3=3$ ✓, $1+4-9=-4$ ✓.

Réponse. Un point unique : $M(1\,;2\,;3)$.

Correction de l'exercice 12 – Équilibrer une réaction chimique

Le système est **homogène** : il a une infinité de solutions, toutes proportionnelles. On choisit donc x comme paramètre.

— Carbone : $z = 3x$.
— Hydrogène : $t = \dfrac{8x}{2} = 4x$.
— Oxygène : $2y = 2z + t = 6x + 4x = 10x$, donc $y = 5x$.

Les solutions sont donc $(x\,;5x\,;3x\,;4x)$.

— Pour obtenir les **plus petits coefficients entiers**, on prend $x = 1$:

$$C_3H_8 + 5\,O_2 \longrightarrow 3\,CO_2 + 4\,H_2O$$

Vérification atome par atome.

— Carbone : 3 à gauche, $3 \times 1 = 3$ à droite ✓.
— Hydrogène : 8 à gauche, $4 \times 2 = 8$ à droite ✓.
— Oxygène : $5 \times 2 = 10$ à gauche, $3 \times 2 + 4 = 10$ à droite ✓.
— **Pourquoi une infinité de solutions est ici normale** : doubler tous les coefficients décrit la même réaction. Le système est fait pour ça.

Réponse. $C_3H_8 + 5\,O_2 \longrightarrow 3\,CO_2 + 4\,H_2O$.

Correction de l'exercice 13 – Un budget en trois postes

On note m, d, c les trois montants (en euros).

$$\begin{cases} m + d + c = 12\,000 \\ m = 2d \\ c = d - 2\,000 \end{cases}$$

Résolution par substitution, la plus rapide quand deux inconnues s'expriment déjà :

— On remplace dans la première équation : $2d + d + (d - 2\,000) = 12\,000$.
— $4d = 14\,000$, donc $d = 3\,500$.
— $m = 2 \times 3\,500 = 7\,000$ et $c = 3\,500 - 2\,000 = 1\,500$.

Vérification.

— $7\,000 + 3\,500 + 1\,500 = 12\,000$ € ✓ · $7\,000 = 2 \times 3\,500$ ✓ · $1\,500 = 3\,500 - 2\,000$ ✓.
— **Conclusion** : 7 000 € de matériel, 3 500 € de déplacements, 1 500 € de communication.
— **Contrôle de bon sens** : les trois montants sont positifs, et le matériel représente un peu moins de 60 % du budget — cohérent avec l'énoncé.

Réponse. Matériel 7 000 €, déplacements 3 500 €, communication 1 500 €.

Correction de l'exercice 14 – Trois mesures et une inconnue en trop

a) **Étape 1 : éliminer y.**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $L_1 + 2L_2$: $x + 4x + 2y - 2y + 3z + 2z = 11 + 14$, soit $5x + 5z = 25$, donc $x + z = 5$.
— $L_2 + L_3$: $5x - z = 13$.

Étape 2 : résoudre.

— De $x = 5 - z$: $5(5 - z) - z = 13$, soit $25 - 6z = 13$, donc $z = 2$ et $x = 3$.
— L_2 : $6 - y + 2 = 7$, donc $y = 1$.
— **Vérification** : $3 + 2 + 6 = 11$ ✓ ; $6 - 1 + 2 = 7$ ✓ ; $9 + 1 - 4 = 6$ ✓.
— **Solution** : $(3\,;1\,;2)$.

b) Avec 6 remplacé par 7, seule la troisième équation change. Le déterminant de la matrice, lui, ne change pas.

— On le calcule en développant selon la première ligne :

$$\det A = 1((-1)(-2) - 1 \times 1) - 2(2 \times (-2) - 1 \times 3) + 3(2 \times 1 - (-1) \times 3) = 1 + 14 + 15 = 30$$

— Comme $\det A \neq 0$, le système admet **une solution unique quel que soit le second membre** : il y a donc encore une solution, simplement différente.
— En reprenant le calcul : $L_2 + L_3$ donne $5x - z = 14$, et avec $x + z = 5$: $5(5 - z) - z = 14$, donc $z = \frac{11}{6}$, $x = \frac{19}{6}$, $y = 2x + z - 7 = \frac{38 + 11 - 42}{6} = \frac{7}{6}$.
— **Ce qu'il faut retenir** : un système à déterminant non nul est **robuste** — il a toujours une solution, mais celle-ci bouge avec les données. Une petite erreur de mesure donne une petite erreur sur le résultat.

Réponse. a) $(3\,;1\,;2)$ · b) oui, car $\det A \neq 0$: la solution devient $\left(\frac{19}{6}\,;\frac{7}{6}\,;\frac{11}{6}\right)$.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : trois systèmes, trois situations

a) **Étape 1 : éliminer z.**

— $L_1 + L_3$: $(2 + 4)x + (3 + 1)y + (1 - 1)z = 13 + 25$, soit $6x + 4y = 38$, c'est-à-dire $3x + 2y = 19$.
— $L_2 + 2L_3$: $(1 + 8)x + (-1 + 2)y + (2 - 2)z = -3 + 50$, soit $9x + y = 47$.

Étape 2 : résoudre.

— De la seconde : $y = 47 - 9x$. On reporte : $3x + 94 - 18x = 19$, donc $-15x = -75$ et $x = 5$.
— $y = 47 - 45 = 2$, puis L_1 : $10 + 6 + z = 13$, donc $z = -3$.
— **Vérification** : $10 + 6 - 3 = 13$ ✓ ; $5 - 2 - 6 = -3$ ✓ ; $20 + 2 + 3 = 25$ ✓.
— **Solution** : $(5\,;2\,;-3)$.

b) La deuxième équation est le double de la première **si et seulement si** $a = 4$.

— **Si** $a = 4$: les deux équations sont équivalentes, il y a une **infinité** de solutions, les couples $(x\,;2 - x)$.
— **Si** $a \neq 4$: les équations sont incompatibles ($2x + 2y$ ne peut valoir à la fois 4 et a), il n'y a **aucune** solution.
— Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ dans tous les cas : c'est le second membre qui décide.

c) On note x, y, z les volumes en litres : $x + y + z = 60$, $x = 2y$, $z = y - 10$.

— Substitution : $2y + y + y - 10 = 60$, donc $4y = 70$ et $y = 17,5$.
— $x = 35$ et $z = 7,5$.
— **Vérification** : $35 + 17,5 + 7,5 = 60$ L ✓ · les trois volumes sont positifs ✓.

Réponse. a) $(5\,;2\,;-3)$ · b) infinité si $a = 4$, aucune sinon · c) 35 L, 17,5 L et 7,5 L.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).