Plaquette 1 – Systèmes, suites couplées et états stables

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes du cours.

— **Système linéaire** $AX = B$: si $\det A \neq 0$, la solution unique est $X = A^{-1}B$.

— **Inverse d'une matrice** 2×2 : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— **Suites couplées** : un système $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ s'écrit $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

— Conséquence immédiate : $U_n = A^n U_0$.

— **Matrice de transition** (marche aléatoire, répartition) : chaque colonne (ou ligne, selon la convention) a une somme égale à 1 ; les coefficients sont des probabilités.

— **État stable** U : vecteur vérifiant $AU = U$, c'est-à-dire $(A - I)U = 0$, avec en général une condition de normalisation (somme des composantes égale à 1 ou à un total donné).

— Pour trouver U, on résout le système $(A - I)U = 0$; les deux équations obtenues sont **proportionnelles**, ce qui est normal.

— **Interprétation** : si les coefficients sont positifs et la matrice « régulière », U_n se rapproche de l'état stable quand n augmente, quel que soit U_0.

Correction de l'exercice 1 – Résoudre un système 2×2

— Matrice du système : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, avec $\det A = 12 - 2 = 10 \neq 0$.

— Inverse : $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

— Solution : $X = A^{-1}B$ avec $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \end{pmatrix}$.

— Première composante : $\dfrac{4 \times 16 - 2 \times 22}{10} = \dfrac{64 - 44}{10} = 2$.

— Seconde : $\dfrac{-16 + 3 \times 22}{10} = \dfrac{-16 + 66}{10} = 5$.

— Donc $x = 2$ et $y = 5$. Vérification : $6 + 10 = 16$ et $2 + 20 = 22$. Correct.

Réponse. $x = 2$ et $y = 5$.

Correction de l'exercice 2 – Système 3×3 par substitution matricielle

Forme matricielle : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Résolution par combinaisons :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $(L_2) - 2(L_1) : -3y - z = -9$, donc $3y + z = 9$.
— $(L_3) - (L_1) : y - 2z = -4$.
— De la première : $z = 9 - 3y$. En reportant : $y - 2(9 - 3y) = -4$, soit $7y = 14$ et $y = 2$.
— Puis $z = 9 - 6 = 3$, et $x = 6 - y - z = 1$.
— Solution : $(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)$. Vérification dans (L_2) : $2 - 2 + 3 = 3$. Correct.

Réponse. $(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)$.

Correction de l'exercice 3 – Écrire des suites couplées

a) $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$.

— Remarque : chaque **colonne** de A a pour somme 1 : c'est une matrice de transition, le total $u_n + v_n$ est donc conservé.

b) $u_1 = 0{,}8 \times 100 + 0{,}3 \times 200 = 80 + 60 = 140$;
$v_1 = 0{,}2 \times 100 + 0{,}7 \times 200 = 20 + 140 = 160$.

— $u_2 = 0{,}8 \times 140 + 0{,}3 \times 160 = 112 + 48 = 160$;
$v_2 = 0{,}2 \times 140 + 0{,}7 \times 160 = 28 + 112 = 140$.
— Contrôle : $u_n + v_n = 300$ à chaque étape. Cohérent avec la remarque.

Réponse. b) $U_1 = \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 140 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 – État stable

On écrit $AU = U$, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} 0{,}8u + 0{,}3v = u \\ 0{,}2u + 0{,}7v = v \end{cases}$$

— La première équation donne $0{,}3v = 0{,}2u$, soit $3v = 2u$ et donc $u = 1{,}5v$.
— La seconde donne $0{,}2u = 0{,}3v$: c'est la **même** équation (les deux équations sont toujours proportionnelles, c'est normal).
— On utilise la condition de normalisation : $u + v = 300$, donc $1{,}5v + v = 300$, soit $2{,}5v = 300$ et $v = 120$, puis $u = 180$.

$$U = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$$

— Vérification : $0{,}8 \times 180 + 0{,}3 \times 120 = 144 + 36 = 180$. Correct.

Réponse. $U = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 – Convergence vers l'état stable

a) $u_3 = 0{,}8 \times 160 + 0{,}3 \times 140 = 128 + 42 = 170$;
$v_3 = 0{,}2 \times 160 + 0{,}7 \times 140 = 32 + 98 = 130$.

— $u_4 = 0{,}8 \times 170 + 0{,}3 \times 130 = 136 + 39 = 175$; $v_4 = 34 + 91 = 125$.

b) La suite des u_n vaut 100, 140, 160, 170, 175… et se rapproche de 180 ; celle des v_n décroît vers 120.

— Les valeurs **convergent** vers l'état stable $\begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$, et l'écart est divisé par 2 à chaque étape (80, 40, 20, 10, 5…).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Propriété générale : pour une matrice de transition à coefficients strictement positifs, U_n tend vers l'état stable **quel que soit** U_0.

Réponse. a) $\begin{pmatrix}170\\130\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}175\\125\end{pmatrix}$. b) convergence vers $\begin{pmatrix}180\\120\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 – Matrice de transition et probabilités

a) On note l'état $\begin{pmatrix}P(A)\\P(B)\end{pmatrix}$.

— Depuis A : reste à A avec 0,9, passe à B avec 0,1.
— Depuis B : passe à A avec 0,4, reste à B avec 0,6.

$$T = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix}$$

b) Colonne 1 : $0{,}9 + 0{,}1 = 1$; colonne 2 : $0{,}4 + 0{,}6 = 1$.

— C'est cohérent : depuis un état donné, le consommateur choisit **nécessairement** l'une des deux marques.

Réponse. a) $T = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix}$. b) sommes des colonnes égales à 1.

Correction de l'exercice 7 – Évolution d'une répartition

On applique $P_{n+1} = TP_n$.

— P_1 : première composante $0{,}9 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}45 + 0{,}2 = 0{,}65$; seconde $0{,}1 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}35$.
— $P_1 = \begin{pmatrix}0{,}65\\0{,}35\end{pmatrix}$.
— P_2 : $0{,}9 \times 0{,}65 + 0{,}4 \times 0{,}35 = 0{,}585 + 0{,}14 = 0{,}725$; et $0{,}1 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times 0{,}35 = 0{,}065 + 0{,}21 = 0{,}275$.
— $P_2 = \begin{pmatrix}0{,}725\\0{,}275\end{pmatrix}$.
— Contrôle : la somme des composantes vaut 1 à chaque étape. La marque A gagne des parts de marché.

Réponse. $P_1 = \begin{pmatrix}0{,}65\\0{,}35\end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix}0{,}725\\0{,}275\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 – Part de marché à long terme

On résout $TP = P$:

$$\begin{cases}0{,}9a + 0{,}4b = a\\0{,}1a + 0{,}6b = b\end{cases}$$

— La première équation donne $0{,}4b = 0{,}1a$, donc $a = 4b$.
— Avec $a + b = 1$: $4b + b = 1$, donc $b = 0{,}2$ et $a = 0{,}8$.

$$P = \begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\end{pmatrix}$$

— À long terme, la marque A capte 80 % du marché et la marque B 20 %.
— Vérification : $0{,}9 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}72 + 0{,}08 = 0{,}8$. Correct. Cohérent avec la tendance observée à l'exercice précédent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$, soit 80 % pour A.

Correction de l'exercice 9 – Suites couplées non conservatives

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

— $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $U_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$.

— Détail de U_2 : $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$ et $v_2 = 2 + 2 \times 1 = 4$.

b) En additionnant les deux relations :

— $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (2u_n + v_n) + (u_n + 2v_n) = 3(u_n + v_n) = 3s_n$.

— La suite (s_n) est donc **géométrique** de raison 3, avec $s_0 = 1$, donc $s_n = 3^n$.

— Contrôle : $s_1 = 3$ $(2 + 1)$, $s_2 = 9$ $(5 + 4)$, $s_3 = 27$ $(14 + 13)$. Correct.

— Ici la somme n'est pas conservée : A n'est pas une matrice de transition (les colonnes ne somment pas à 1).

Réponse. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$ · b) $s_n = 3^n$.

Correction de l'exercice 10 – Différence de deux suites couplées

— En soustrayant les deux relations : $d_{n+1} = (2u_n + v_n) - (u_n + 2v_n) = u_n - v_n = d_n$.

— La suite (d_n) est donc **constante**, égale à $d_0 = 1 - 0 = 1$.

— On dispose alors du système $\begin{cases} u_n + v_n = 3^n \\ u_n - v_n = 1 \end{cases}$.

— En additionnant : $2u_n = 3^n + 1$, donc $u_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

— En soustrayant : $v_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

— Contrôle pour $n = 3$: $u_3 = \dfrac{27 + 1}{2} = 14$ et $v_3 = \dfrac{26}{2} = 13$. Conforme aux valeurs calculées.

Réponse. $d_n = 1$, puis $u_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$ et $v_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Correction de l'exercice 11 – Problème : deux réservoirs

a) Depuis A : 80 % reste, 20 % part vers B. Depuis B : 10 % part vers A, 90 % reste.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

b) $A_1 = 0{,}8 \times 500 + 0{,}1 \times 300 = 400 + 30 = 430$ L.

— $B_1 = 0{,}2 \times 500 + 0{,}9 \times 300 = 100 + 270 = 370$ L.

— Contrôle : $430 + 370 = 800$ L, le volume total est conservé.

c) On résout $MU = U$ avec $a + b = 800$:

— Première équation : $0{,}8a + 0{,}1b = a$, donc $0{,}1b = 0{,}2a$ et $b = 2a$.

— Avec $a + b = 800$: $3a = 800$, donc $a = \dfrac{800}{3} \approx 266{,}7$ L et $b \approx 533{,}3$ L.

— À long terme, A contient environ 267 L et B environ 533 L.

Réponse. b) 430 L et 370 L · c) $\dfrac{800}{3} \approx 266{,}7$ L et $\dfrac{1\,600}{3} \approx 533{,}3$ L.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Problème : trois états

L’état initial est $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (bon état certain).

— $P_1 = TP_0$: c’est simplement la **première colonne** de T, soit $\begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

— $P_2 = TP_1$:

— Ligne B : $0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}1 = 0{,}49 + 0{,}04 = 0{,}53$.

— Ligne M : $0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}14 + 0{,}12 + 0{,}05 = 0{,}31$.

— Ligne P : $0{,}1 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}07 + 0{,}04 + 0{,}05 = 0{,}16$.

— $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}53 \\ 0{,}31 \\ 0{,}16 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : $0{,}53 + 0{,}31 + 0{,}16 = 1$. Cohérent.

Réponse. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}53 \\ 0{,}31 \\ 0{,}16 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 13 – Système avec paramètre

a) Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, le système s’écrit $AX = B$. Une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant n’est pas nul :
$\det A = 2 \times 3 - m \times 1 = 6 - m$. Donc A est inversible pour tout $m \neq 6$.

b) Pour $m = 4$, $\det A = 2$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 30 - 28 \\ -10 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le système a pour unique solution $x = 1$, $y = 2$. **Contrôle** : $2 + 8 = 10$ et $1 + 6 = 7$.

Réponse. a) A inversible si et seulement si $m \neq 6$ · b) $x = 1$ et $y = 2$.

Correction de l’exercice 14 – Suite récurrente d’ordre 2

a) On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, avec $u_{n+2} = 1 \times u_{n+1} + 2 \times u_n$ et $u_{n+1} = 1 \times u_{n+1} + 0 \times u_n$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 0 \\ 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 2 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Par récurrence, $X_n = A^n X_0$, donc $X_2 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, c’est-à-dire $u_3 = 5$ et $u_2 = 3$. **Contrôle** par la relation :
$u_2 = 1 + 2 \times 1 = 3$ et $u_3 = 3 + 2 \times 1 = 5$.

Réponse. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ · b) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = 3$ et $u_3 = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : suite couplée et état stable

a) Depuis le centre : 85 % restent, 15 % partent. Depuis la périphérie : 5 % viennent au centre, 95 % restent.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

— Centre après un an : $0{,}85 \times 40\,000 + 0{,}05 \times 60\,000 = 34\,000 + 3\,000 = 37\,000$.
— Périphérie : $0{,}15 \times 40\,000 + 0{,}95 \times 60\,000 = 6\,000 + 57\,000 = 63\,000$.
— Contrôle : total conservé à 100 000 habitants.

b) On résout $MU = U$ avec $c + p = 100\,000$:

— $0{,}85c + 0{,}05p = c$ donne $0{,}05p = 0{,}15c$, soit $p = 3c$.
— Donc $c + 3c = 100\,000$, d’où $c = 25\,000$ et $p = 75\,000$.
— À long terme : 25 000 habitants au centre et 75 000 en périphérie.
— Vérification : $0{,}85 \times 25\,000 + 0{,}05 \times 75\,000 = 21\,250 + 3\,750 = 25\,000$. Correct.

Réponse. a) 37 000 et 63 000 · b) 25 000 au centre et 75 000 en périphérie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).