

Plaquette 1 - Systèmes, suites couplées et états stables

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes du cours.

- **Système linéaire** $AX = B$: si $\det A \neq 0$, la solution unique est $X = A^{-1}B$.
- **Inverse d'une matrice** 2×2 : $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- **Suites couplées** : un système $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ s'écrit $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Conséquence immédiate : $U_n = A^n U_0$.
- **Matrice de transition** (marche aléatoire, répartition) : chaque colonne (ou ligne, selon la convention) a une somme égale à 1 ; les coefficients sont des probabilités.
- **État stable** U : vecteur vérifiant $AU = U$, c'est-à-dire $(A - I)U = 0$, avec en général une condition de normalisation (somme des composantes égale à 1 ou à un total donné).
- Pour trouver U , on résout le système $(A - I)U = 0$; les deux équations obtenues sont **proportionnelles**, ce qui est normal.
- **Interprétation** : si les coefficients sont positifs et la matrice « régulière », U_n se rapproche de l'état stable quand n augmente, quel que soit U_0 .

Correction de l'exercice 1 - Résoudre un système 2×2

- Matrice du système : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, avec $\det A = 12 - 2 = 10 \neq 0$.
- Inverse : $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Solution : $X = A^{-1}B$ avec $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \end{pmatrix}$.
- Première composante : $\frac{4 \times 16 - 2 \times 22}{10} = \frac{64 - 44}{10} = 2$.
- Seconde : $\frac{-16 + 3 \times 22}{10} = \frac{-16 + 66}{10} = 5$.
- Donc $x = 2$ et $y = 5$. Vérification : $6 + 10 = 16$ et $2 + 20 = 22$. Correct.

Réponse. $x = 2$ et $y = 5$.

Correction de l'exercice 2 - Système 3×3 par substitution matricielle

Forme matricielle : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Résolution par combinaisons :

- $(L_2) - 2(L_1)$: $-3y - z = -9$, donc $3y + z = 9$.
- $(L_3) - (L_1)$: $y - 2z = -4$.

- De la première : $z = 9 - 3y$. En reportant : $y - 2(9 - 3y) = -4$, soit $7y = 14$ et $y = 2$.
- Puis $z = 9 - 6 = 3$, et $x = 6 - y - z = 1$.
- Solution : $(x; y; z) = (1; 2; 3)$. Vérification dans (L_2) : $2 - 2 + 3 = 3$. Correct.

Réponse. $(x; y; z) = (1; 2; 3)$.

Correction de l'exercice 3 - Écrire des suites couplées

a) $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$.

- Remarque : chaque **colonne** de A a pour somme 1 : c'est une matrice de transition, le total $u_n + v_n$ est donc conservé.

b) $u_1 = 0,8 \times 100 + 0,3 \times 200 = 80 + 60 = 140$;

$v_1 = 0,2 \times 100 + 0,7 \times 200 = 20 + 140 = 160$.

— $u_2 = 0,8 \times 140 + 0,3 \times 160 = 112 + 48 = 160$;

$v_2 = 0,2 \times 140 + 0,7 \times 160 = 28 + 112 = 140$.

- Contrôle : $u_n + v_n = 300$ à chaque étape. Cohérent avec la remarque.

Réponse. b) $U_1 = \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 140 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 - État stable

On écrit $AU = U$, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} 0,8u + 0,3v = u \\ 0,2u + 0,7v = v \end{cases}$$

- La première équation donne $0,3v = 0,2u$, soit $3v = 2u$ et donc $u = 1,5v$.
- La seconde donne $0,2u = 0,3v$: c'est la **même** équation (les deux équations sont toujours proportionnelles, c'est normal).
- On utilise la condition de normalisation : $u + v = 300$, donc $1,5v + v = 300$, soit $2,5v = 300$ et $v = 120$, puis $u = 180$.

$$U = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$$

- Vérification : $0,8 \times 180 + 0,3 \times 120 = 144 + 36 = 180$. Correct.

Réponse. $U = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 - Convergence vers l'état stable

a) $u_3 = 0,8 \times 160 + 0,3 \times 140 = 128 + 42 = 170$;

$v_3 = 0,2 \times 160 + 0,7 \times 140 = 32 + 98 = 130$.

— $u_4 = 0,8 \times 170 + 0,3 \times 130 = 136 + 39 = 175$; $v_4 = 34 + 91 = 125$.

- b) La suite des u_n vaut 100, 140, 160, 170, 175... et se rapproche de 180 ; celle des v_n décroît vers 120.

- Les valeurs **convergent** vers l'état stable $\begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$, et l'écart est divisé par 2 à chaque étape (80, 40, 20, 10, 5...).

- Propriété générale : pour une matrice de transition à coefficients strictement positifs, U_n tend vers l'état stable **quel que soit** U_0 .

Réponse. a) $\begin{pmatrix} 170 \\ 130 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 175 \\ 125 \end{pmatrix}$ · b) convergence vers $\begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 - Matrice de transition et probabilités

a) On note l'état $\begin{pmatrix} P(A) \\ P(B) \end{pmatrix}$.

- Depuis A : reste à A avec 0,9, passe à B avec 0,1.
- Depuis B : passe à A avec 0,4, reste à B avec 0,6.

$$T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

b) Colonne 1 : $0,9 + 0,1 = 1$; colonne 2 : $0,4 + 0,6 = 1$.

- C'est cohérent : depuis un état donné, le consommateur choisit **nécessairement** l'une des deux marques.

Réponse. a) $T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ · b) sommes des colonnes égales à 1.

Correction de l'exercice 7 - Évolution d'une répartition

On applique $P_{n+1} = TP_n$.

- P_1 : première composante $0,9 \times 0,5 + 0,4 \times 0,5 = 0,45 + 0,2 = 0,65$; seconde $0,1 \times 0,5 + 0,6 \times 0,5 = 0,35$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,35 \end{pmatrix}.$$

- P_2 : $0,9 \times 0,65 + 0,4 \times 0,35 = 0,585 + 0,14 = 0,725$; et $0,1 \times 0,65 + 0,6 \times 0,35 = 0,065 + 0,21 = 0,275$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,725 \\ 0,275 \end{pmatrix}.$$

- Contrôle : la somme des composantes vaut 1 à chaque étape. La marque A gagne des parts de marché.

Réponse. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,35 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0,725 \\ 0,275 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 - Part de marché à long terme

On résout $TP = P$:

$$\begin{cases} 0,9a + 0,4b = a \\ 0,1a + 0,6b = b \end{cases}$$

- La première équation donne $0,4b = 0,1a$, donc $a = 4b$.
- Avec $a + b = 1$: $4b + b = 1$, donc $b = 0,2$ et $a = 0,8$.

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

- À long terme, la marque A capte 80 % du marché et la marque B 20 %.
- Vérification : $0,9 \times 0,8 + 0,4 \times 0,2 = 0,72 + 0,08 = 0,8$. Correct. Cohérent avec la tendance observée à l'exercice précédent.

Réponse. $P = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$, soit 80 % pour A.

Correction de l'exercice 9 - Suites couplées non conservatives

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

— $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}; U_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$.

— Détail de U_2 : $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$ et $v_2 = 2 + 2 \times 1 = 4$.

b) En additionnant les deux relations :

— $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (2u_n + v_n) + (u_n + 2v_n) = 3(u_n + v_n) = 3s_n$.

— La suite (s_n) est donc **géométrique** de raison 3, avec $s_0 = 1$, donc $s_n = 3^n$.

— Contrôle : $s_1 = 3(2 + 1)$, $s_2 = 9(5 + 4)$, $s_3 = 27(14 + 13)$. Correct.

— Ici la somme n'est pas conservée : A n'est pas une matrice de transition (les colonnes ne somment pas à 1).

Réponse. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$. b) $s_n = 3^n$.

Correction de l'exercice 10 - Différence de deux suites couplées

— En soustrayant les deux relations : $d_{n+1} = (2u_n + v_n) - (u_n + 2v_n) = u_n - v_n = d_n$.

— La suite (d_n) est donc **constante**, égale à $d_0 = 1 - 0 = 1$.

— On dispose alors du système $\begin{cases} u_n + v_n = 3^n \\ u_n - v_n = 1 \end{cases}$.

— En additionnant : $2u_n = 3^n + 1$, donc $u_n = \frac{3^n + 1}{2}$.

— En soustrayant : $v_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

— Contrôle pour $n = 3$: $u_3 = \frac{27 + 1}{2} = 14$ et $v_3 = \frac{26}{2} = 13$. Conforme aux valeurs calculées.

Réponse. $d_n = 1$, puis $u_n = \frac{3^n + 1}{2}$ et $v_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Correction de l'exercice 11 - Problème : deux réservoirs

a) Depuis A : 80 % reste, 20 % part vers B. Depuis B : 10 % part vers A, 90 % reste.

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$$

b) $A_1 = 0,8 \times 500 + 0,1 \times 300 = 400 + 30 = 430$ L.

— $B_1 = 0,2 \times 500 + 0,9 \times 300 = 100 + 270 = 370$ L.

— Contrôle : $430 + 370 = 800$ L, le volume total est conservé.

c) On résout $MU = U$ avec $a + b = 800$:

— Première équation : $0,8a + 0,1b = a$, donc $0,1b = 0,2a$ et $b = 2a$.

— Avec $a + b = 800$: $3a = 800$, donc $a = \frac{800}{3} \approx 266,7$ L et $b \approx 533,3$ L.

— À long terme, A contient environ 267 L et B environ 533 L.

Réponse. b) 430 L et 370 L · c) $\frac{800}{3} \approx 266,7$ L et $\frac{1600}{3} \approx 533,3$ L.

Correction de l'exercice 12 - Problème : trois états

L'état initial est $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (bon état certain).

— $P_1 = TP_0$: c'est simplement la **première colonne** de T , soit $\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

— $P_2 = TP_1$:

— Ligne B : $0,7 \times 0,7 + 0,2 \times 0,2 + 0 \times 0,1 = 0,49 + 0,04 = 0,53$.

— Ligne M : $0,2 \times 0,7 + 0,6 \times 0,2 + 0,5 \times 0,1 = 0,14 + 0,12 + 0,05 = 0,31$.

— Ligne P : $0,1 \times 0,7 + 0,2 \times 0,2 + 0,5 \times 0,1 = 0,07 + 0,04 + 0,05 = 0,16$.

— $P_2 = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,31 \\ 0,16 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : $0,53 + 0,31 + 0,16 = 1$. Cohérent.

Réponse. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,31 \\ 0,16 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 13 - Synthèse : suite couplée et état stable

a) Depuis le centre : 85 % restent, 15 % partent. Depuis la périphérie : 5 % viennent au centre, 95 % restent.

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 \\ 0,15 & 0,95 \end{pmatrix}$$

— Centre après un an : $0,85 \times 40\,000 + 0,05 \times 60\,000 = 34\,000 + 3\,000 = 37\,000$.

— Périphérie : $0,15 \times 40\,000 + 0,95 \times 60\,000 = 6\,000 + 57\,000 = 63\,000$.

— Contrôle : total conservé à 100 000 habitants.

b) On résout $MU = U$ avec $c + p = 100\,000$:

— $0,85c + 0,05p = c$ donne $0,05p = 0,15c$, soit $p = 3c$.

— Donc $c + 3c = 100\,000$, d'où $c = 25\,000$ et $p = 75\,000$.

— À long terme : 25 000 habitants au centre et 75 000 en périphérie.

— Vérification : $0,85 \times 25\,000 + 0,05 \times 75\,000 = 21\,250 + 3\,750 = 25\,000$. Correct.

Réponse. a) 37 000 et 63 000 · b) 25 000 au centre et 75 000 en périphérie.