

Plaquette 4 – Matrices de transition et états stables

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Quand une situation évolue par **étapes** entre plusieurs états (client fidèle ou non, machine en marche ou en panne, temps beau ou pluvieux), la **matrice de transition** résume toutes les probabilités de passage. On calcule alors la répartition après n étapes par $X_n = P^n X_0$, on cherche l'**état stable** et l'on démontre la convergence.

Exercice 1 – Écrire une matrice de transition

Dans une ville, s'il fait beau un jour, il fait encore beau le lendemain avec une probabilité de 0,8. S'il pleut, il fait beau le lendemain avec une probabilité de 0,3.

- Écrire la matrice de transition P (états : beau, pluie).
- Vérifier la propriété caractéristique de ses colonnes.

Exercice 2 – Prévoir trois jours

On garde $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$. Aujourd'hui, il y a 20 % de chances qu'il fasse beau.

Déterminer la probabilité qu'il fasse beau dans un jour, deux jours, trois jours.

Exercice 3 – Matrice et arbre pondéré

On reprend la situation météo avec $X_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$.

Retrouver la probabilité de beau temps demain à l'aide d'un **arbre pondéré**, et expliquer le lien avec le produit matriciel.

Exercice 4 – L'état stable de la météo

Déterminer l'état stable de la matrice $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $PX = X$ et $x + y = 1$.

Exercice 5 – Démontrer la convergence

On note p_n la probabilité de beau temps le jour n , avec $p_0 = 0,2$.

- Montrer que $p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,3$.
- En déduire l'expression explicite de p_n et sa limite.

Exercice 6 – Parts de marché

Deux marques de café se partagent le marché. Chaque mois, 15 % des clients de la marque A passent à B , et 10 % des clients de B passent à A .

- a) Écrire la matrice de transition.
- b) Déterminer les parts de marché à long terme.

Exercice 7 – Disponibilité d'une machine

Une machine est chaque jour soit en marche, soit en panne. Si elle marche, elle tombe en panne le lendemain avec une probabilité de 0,05. Si elle est en panne, elle est réparée pour le lendemain avec une probabilité de 0,45.

Déterminer le **taux de disponibilité** de la machine à long terme.

Exercice 8 – Trois états

Un client d'un service peut être en formule Essentielle (E), Confort (C) ou Premium (P). La matrice de transition mensuelle est

$$M = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,25 \\ 0,15 & 0,65 & 0,15 \\ 0,10 & 0,10 & 0,60 \end{pmatrix}$$

(l'ordre des états est E, C, P). Tous les clients sont en formule E au départ.

Calculer la répartition après un mois, puis après deux mois.

Exercice 9 – L'état stable à trois états

Déterminer l'état stable de la matrice M de l'exercice précédent.

Exercice 10 – Un état absorbant

Un joueur arrête définitivement de jouer avec une probabilité de 0,1 à chaque partie. Tant qu'il joue, il continue.

- a) Écrire la matrice de transition (états : « joue », « a arrêté »).
- b) Quelle est la probabilité qu'il joue encore après 3 parties ? Et la limite ?

Exercice 11 – Lire une puissance de la matrice

On donne, pour la matrice météo $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,45 \\ 0,30 & 0,55 \end{pmatrix} \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0,650 & 0,525 \\ 0,350 & 0,475 \end{pmatrix}$$

- a) Que signifie le coefficient 0,45 de P^2 ?
- b) Sachant qu'il pleut aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fasse beau dans trois jours ?

Exercice 12 – Retrouver une transition manquante

Une matrice de transition à deux états s'écrit $P = \begin{pmatrix} 0,7 & a \\ b & 0,4 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer a et b .

b) Déterminer l'état stable correspondant.

Exercice 13 – Effectifs plutôt que probabilités

Une salle de sport compte 800 adhérents. Chaque mois, 12 % des adhérents « réguliers » deviennent « occasionnels », et 20 % des occasionnels redeviennent réguliers. Il y a aujourd'hui 500 réguliers.

- a) Calculer les effectifs après un mois, puis après deux mois.
- b) Déterminer la répartition d'équilibre.

Exercice 14 – Comparer deux stratégies

Une entreprise perd 20 % de ses clients chaque mois et en récupère 10 % chez le concurrent.

- a) Déterminer sa part de marché à long terme.
- b) Deux stratégies sont envisagées : ramener le taux de départ à 15 %, ou porter le taux de conquête à 15 %. Laquelle est la plus efficace ?

Exercice 15 – Bilan : une chaîne complète

Dans un jeu, un joueur est soit en position favorable (F), soit défavorable (D). Chaque tour : s'il est en F , il y reste avec une probabilité de 0,6 ; s'il est en D , il passe en F avec une probabilité de 0,3. Au départ, il est en position favorable.

- a) Écrire la matrice P et calculer la répartition après deux tours.
- b) Déterminer l'état stable.
- c) On note f_n la probabilité d'être en F au tour n . Montrer que $f_{n+1} = 0,3f_n + 0,3$ et en déduire f_n .