Plaquette 3 – Suites couplées : expression explicite et limites

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Deux suites qui se définissent l'une l'autre. On les écrit sous la forme $X_{n+1} = AX_n$, puis on cherche les **combinaisons géométriques** ($u_n + v_n$, $u_n - v_n$, ou une combinaison adaptée) pour obtenir les **expressions explicites** de u_n et v_n — et donc leurs limites.

Exercice 1 – Écrire et calculer

Soit $u_0 = 3$, $v_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

a) Écrire la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b) Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

Exercice 2 – Deux combinaisons géométriques

On garde $u_{n+1} = 4u_n - 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$, avec $u_0 = 3$ et $v_0 = 1$.

a) Montrer que $t_n = u_n - v_n$ est géométrique.

b) Montrer que $w_n = u_n - 2v_n$ est géométrique.

Exercice 3 – Expressions explicites

À l'aide des deux suites géométriques précédentes ($t_n = u_n - v_n = 2 \times 3^n$ et $w_n = u_n - 2v_n = 2^n$), exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 4 – Somme et différence

Soit $a_0 = 5$, $b_0 = 1$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{2} \\ [2mm]b_{n+1} = \dfrac{3a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

a) Montrer que $s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$ sont géométriques.

b) En déduire a_n et b_n.

Exercice 5 – Un modèle de répartition

Deux bassins communiquent. Chaque minute, 10 % du contenu de A passe dans B, et 30 % du contenu de B passe dans A. Au départ, A contient 100 L et B contient 60 L.

a) Écrire les relations de récurrence et vérifier que le volume total est constant.

b) Calculer les volumes après une minute.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Vers l'équilibre des bassins

On reprend les deux bassins ($u_{n+1} = 0,9u_n + 0,3v_n$, $u_0 = 100$, total 160 L).

a) Montrer que $w_n = u_n - 3v_n$ est géométrique de raison $0,6$.

b) En déduire u_n, puis la limite des deux volumes.

Exercice 7 – Deux offres d'abonnement

Un opérateur propose deux offres. Chaque mois, 20 % des clients de l'offre A passent à B, et 30 % de ceux de B passent à A. Le parc compte 500 clients, dont 100 en offre A au départ.

a) Écrire le modèle et calculer la répartition après un mois.

b) Montrer que $w_n = 2u_n - 3v_n$ est géométrique de raison $0,5$, et en déduire u_n.

Exercice 8 – Une suite d'ordre 2 déguisée

Soit (a_n) définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

a) En posant $u_n = a_{n+1}$ et $v_n = a_n$, écrire le système sous forme matricielle.

b) Montrer que $a_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 9 – Croissance de deux espèces

Deux populations d'insectes évoluent selon

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = 40$ et $y_0 = 10$ (en milliers).

a) Déterminer les expressions explicites de x_n et y_n.

b) Étudier la limite du rapport $\dfrac{x_n}{y_n}$.

Exercice 10 – Deux comptes et un virement

Deux comptes rapportent 2 % par an. Chaque année, après les intérêts, on vire 500 € du compte A vers le compte B. Au départ, A contient 10 000 € et B contient 2 000 €.

a) Écrire les relations de récurrence.

b) Déterminer l'expression explicite du solde de A.

Exercice 11 – Trouver la bonne combinaison

Soit $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n \end{cases}$

Déterminer les réels α tels que $w_n = u_n + \alpha v_n$ soit géométrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Un système qui se stabilise

Soit $\begin{cases} u_{n+1} = 0,5u_n + 0,2v_n + 3 \\ v_{n+1} = 0,5u_n + 0,8v_n \end{cases}$ avec $u_0 = 10$ et $v_0 = 0$.

a) Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

b) Déterminer le couple $(\ell\,;m)$ tel que le système soit stationnaire, s'il existe.

Exercice 13 – Migration entre deux régions

Chaque année, 5 % des habitants de la région R_1 partent vers R_2, et 15 % de ceux de R_2 vont vers R_1. Au départ, R_1 compte 2 millions d'habitants et R_2 en compte 6 millions.

a) Écrire le modèle.

b) Montrer que $w_n = u_n - 3v_n$ est géométrique et en déduire u_n.

Exercice 14 – Décroissance couplée

Deux réservoirs se vident : $\begin{cases} u_{n+1} = 0,5u_n + 0,1v_n \\ v_{n+1} = 0,1u_n + 0,5v_n \end{cases}$ avec $u_0 = 80$ et $v_0 = 20$.

a) Déterminer u_n et v_n.

b) Que valent les limites ? Interpréter.

Exercice 15 – Bilan : un système complet

Soit $u_0 = 2$, $v_0 = 6$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} \\ [2mm]v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$

a) Montrer que $s_n = u_n + v_n$ est constante.

b) Montrer que $d_n = u_n - v_n$ est géométrique et déterminer sa raison.

c) En déduire u_n et v_n, puis leurs limites.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).