Plaquette 5 – Synthèse : modéliser, calculer, décider

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

La plaquette de synthèse du chapitre : chaque exercice part d'une **situation réelle** — flotte de véhicules, réseau de transport, épidémie, production d'énergie — et demande le même travail complet : traduire en **matrices**, calculer l'évolution ou résoudre le système, déterminer l'**état limite**, puis **répondre à la question posée** avec ses unités et son interprétation.

Exercice 1 – Une flotte de véhicules

Une société de location possède 600 véhicules répartis entre deux agences. Chaque jour, 20 % des véhicules de A sont rendus en B, et 40 % de ceux de B sont rendus en A. Au départ, chaque agence en a 300.

a) Calculer la répartition après un jour.

b) Déterminer la répartition d'équilibre.

Exercice 2 – Production d'énergie

Trois sources produisent chaque jour x, y et z mégawattheures.

— la production totale est de 300 MWh ;

— le double de la première, plus la deuxième, plus le triple de la troisième font 620 MWh ;

— la première dépasse la deuxième de 40 MWh.

Déterminer les trois productions.

Exercice 3 – Trafic entre trois villes

Des navettes circulent entre trois villes. La matrice de transition journalière est

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une matrice de transition.

b) Déterminer la répartition d'équilibre des navettes.

Exercice 4 – Deux entrepôts et un flux

Deux entrepôts contiennent au total 900 palettes. Chaque semaine, 10 % des palettes de A partent vers B, et 20 % de celles de B reviennent vers A. Au départ, A en contient 700.

a) Écrire le modèle et calculer la répartition après une semaine.

b) Montrer que $w_n = u_n - 2v_n$ est géométrique, puis déterminer u_n et sa limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Diffusion d'une information

Dans un groupe, une personne informée le reste définitivement. Chaque jour, 30 % des personnes non informées apprennent la nouvelle.

a) Écrire la matrice de transition (états : informé, non informé).

b) Quelle proportion du groupe est informée après 1, 2, 5 jours ?

Exercice 6 – Un modèle épidémique simple

Dans une population, une personne saine devient malade d'un jour à l'autre avec une probabilité de $0,10$; une personne malade guérit avec une probabilité de $0,05$ (et peut retomber malade).

a) Écrire la matrice de transition (états : sain, malade).

b) Déterminer la proportion de malades à l'équilibre.

Exercice 7 – Recyclage à trois catégories

Des bacs de tri sont classés en trois qualités. La matrice de transition mensuelle est

$$M = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,16 & 0,16 \\ 0,14 & 0,74 & 0,14 \\ 0,10 & 0,10 & 0,70 \end{pmatrix}$$

Tous les bacs sont en catégorie 1 au départ.

a) Calculer la répartition après un mois.

b) Vérifier que $(0,4\,;0,35\,;0,25)$ est l'état stable.

Exercice 8 – Deux ateliers en croissance

La production de deux ateliers évolue selon

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1,2a_n + 0,1b_n \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 1,2b_n \end{cases}$$

avec $a_0 = 50$ et $b_0 = 30$ (en tonnes).

a) Déterminer a_n et b_n.

b) La production totale double-t-elle en moins de six ans ?

Exercice 9 – Choisir entre deux fournisseurs

Deux fournisseurs proposent trois composants aux prix unitaires (en euros) :

$$F = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 15 \\ 11 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

(lignes : fournisseurs ; colonnes : composants C_1, C_2, C_3).

Une commande porte sur 100 unités de C_1, 200 de C_2 et 50 de C_3.

Déterminer le fournisseur le moins cher.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Un paramètre à ajuster

Une transition à deux états s'écrit $P = \begin{pmatrix} 1-a & 0,2 \\ a & 0,8 \end{pmatrix}$, avec $0 < a < 1$.

a) Déterminer l'état stable en fonction de a.

b) Pour quelle valeur de a l'état stable vaut-il $(0,5\,;0,5)$?

Exercice 11 – Trois fermes et un assolement

Trois parcelles totalisent 240 hectares.

— la première fait deux fois la surface de la deuxième ;
— la troisième dépasse la deuxième de 30 hectares.

Déterminer les trois surfaces, puis la recette totale sachant que les rendements sont de 800 €, 1 100 € et 950 € par hectare.

Exercice 12 – Quand le modèle n'a pas d'équilibre

Une population évolue selon $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,2 \\ 0,3 & 1,05 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il n'existe pas d'état stable non nul, et expliquer pourquoi.

Exercice 13 – Retour sur investissement

Une entreprise investit dans deux équipements. Chaque année, la valeur du premier baisse de 20 % et celle du second de 10 %. Les valeurs initiales sont 50 000 € et 30 000 €.

a) Écrire X_n en fonction de n.

b) Au bout de combien d'années la valeur totale passe-t-elle sous 40 000 € ?

Exercice 14 – Un aller-retour entre deux modèles

Un même phénomène est décrit de deux façons :

— **(i)** par les suites $u_{n+1} = 0,7u_n + 0,2v_n$ et $v_{n+1} = 0,3u_n + 0,8v_n$;
— **(ii)** par la relation $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$, où p_n est la proportion du premier groupe.

Montrer que les deux descriptions coïncident, en supposant $u_n + v_n = 1$.

Exercice 15 – Bilan : le parc de vélos

Une ville gère 3 000 vélos en libre-service, répartis entre le centre (C) et la périphérie (P). Chaque jour, 30 % des vélos du centre finissent en périphérie, et 45 % de ceux de la périphérie reviennent au centre. Ce matin, 2 000 vélos sont au centre.

a) Écrire la matrice de transition et calculer la répartition demain.

b) Déterminer la répartition d'équilibre.

c) On note c_n le nombre de vélos au centre. Montrer que $c_{n+1} = 0,25\,c_n + 1\,350$, puis donner c_n et sa limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).