Plaquette 2 – Systèmes linéaires 3 × 3 : résolution et discussion

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On résout des systèmes de trois équations à trois inconnues : par **combinaisons de lignes** (méthode du pivot), ou par l'**inverse** lorsqu'elle est fournie. On apprend aussi à reconnaître les systèmes **sans solution** et ceux qui en ont une **infinité**, et à modéliser des situations concrètes — dosages, tarifs, circuits électriques.

Exercice 1 – Résoudre par le pivot

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

Exercice 2 – Un second système

Résoudre

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

Exercice 3 – Utiliser une inverse fournie

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & -15 & 3 \\ -18 & 24 & -6 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier une colonne du produit AA^{-1}.

b) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 – La même matrice, un autre second membre

Avec la matrice A et son inverse de l'exercice précédent, résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix}$.

Quel avantage la méthode par l'inverse présente-t-elle ici ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une infinité de solutions

On considère

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 2y + z = 170 \\ x - z = -30 \end{cases}$$

a) Montrer qu'une ligne est combinaison des deux autres.

b) Résoudre le système.

Exercice 6 – Aucune solution

On reprend la matrice précédente, mais avec un autre second membre :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 2y + z = 170 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Montrer que ce système n'a aucune solution.

Exercice 7 – Un paramètre dans le système

Soit m un réel. On considère

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + mz = 1 \end{cases}$$

a) Résoudre le système en fonction de m lorsque c'est possible.

b) Pour quelle valeur de m le système n'a-t-il pas une solution unique ?

Exercice 8 – Une recette à doser

Un pâtissier prépare 100 g d'un mélange de trois farines A, B, C.

— la masse de A plus deux fois celle de C, moins celle de B, vaut 20 g ;
— deux fois la masse de A plus celle de B, moins celle de C, vaut 90 g.

Déterminer les trois masses.

Exercice 9 – Trois tarifs de cinéma

Un cinéma pratique trois tarifs : adulte, enfant et senior.

— 2 adultes, 3 enfants et 1 senior paient 40 € ;
— 1 adulte, 1 enfant et 2 seniors paient 28 € ;
— 3 adultes et 2 enfants paient 37 €.

Déterminer les trois tarifs.

Exercice 10 – Un circuit électrique

Dans un circuit, un courant d'intensité i_1 se divise en deux branches d'intensités i_2 et i_3. Les lois de Kirchhoff donnent

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ 1 \times i_1 + 2 \times i_2 = 14 \\ 1 \times i_1 + 4 \times i_3 = 14 \end{cases}$$

(les intensités sont en ampères, la tension du générateur vaut 14 V).

Déterminer les trois intensités.

Exercice 11 – Trois plans dans l'espace

On considère les trois plans d'équations

$$(P_1) : x + y + z = 6 \qquad (P_2) : 2x - y + z = 3 \qquad (P_3) : x + 2y - 3z = -4$$

Déterminer leur intersection et l'interpréter.

Exercice 12 – Équilibrer une réaction chimique

On veut équilibrer la combustion du propane :

$$x\,C_3H_8 + y\,O_2 \longrightarrow z\,CO_2 + t\,H_2O$$

Les conservations des atomes de carbone, d'hydrogène et d'oxygène donnent $3x = z$, $8x = 2t$ et $2y = 2z + t$.

Déterminer les plus petits coefficients entiers.

Exercice 13 – Un budget en trois postes

Une association répartit un budget de 12 000 € entre trois postes : matériel, déplacements et communication.

— le matériel représente le double des déplacements ;

— la communication vaut 2 000 € de moins que les déplacements.

Déterminer les trois montants.

Exercice 14 – Trois mesures et une inconnue en trop

Un laboratoire mesure trois grandeurs liées par

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 2x - y + z = 7 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

a) Résoudre le système.

b) La troisième mesure est entachée d'une erreur : le second membre vaut en réalité 7 au lieu de 6. Le système admet-il encore une solution ?

Exercice 15 – Bilan : trois systèmes, trois situations

a) Résoudre $\begin{cases} 2x + 3y + z = 13 \\ x - y + 2z = -3 \\ 4x + y - z = 25 \end{cases}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Discuter, selon le réel a, le nombre de solutions de $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = a \end{cases}$

c) Un mélange de 60 L doit contenir trois liquides : le premier vaut le double du deuxième, et le troisième 10 L de moins que le deuxième. Déterminer les volumes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).