Plaquette 1 – Systèmes, suites couplées et états stables

Matrices : applications — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On résout des systèmes par le calcul matriciel, on étudie des **suites couplées** écrites sous la forme $U_{n+1} = AU_n$, on calcule un **état stable** (vecteur propre associé à la valeur 1), et on interprète des matrices de transition.

Exercice 1 – Résoudre un système 2×2

Résoudre par le calcul matriciel :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ x + 4y = 22 \end{cases}$$

Exercice 2 – Système 3×3 par substitution matricielle

Écrire sous forme matricielle, puis résoudre par substitution :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 – Écrire des suites couplées

Deux suites vérifient $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}3v_n \\ v_{n+1} = 0{,}2u_n + 0{,}7v_n \end{cases}$ avec $u_0 = 100$ et $v_0 = 200$.

a) Écrire la relation sous la forme $U_{n+1} = AU_n$.

b) Calculer U_1 et U_2.

Exercice 4 – État stable

Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, déterminer l'état stable $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tel que $AU = U$ et $u + v = 300$.

Exercice 5 – Convergence vers l'état stable

On reprend $U_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$ et la matrice A précédente. On a trouvé $U_1 = \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 140 \end{pmatrix}$.

a) Calculer U_3 et U_4.

b) Comparer avec l'état stable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Matrice de transition et probabilités

Un consommateur choisit chaque mois la marque A ou la marque B. S'il a choisi A, il reste à A avec la probabilité 0,9 ; s'il a choisi B, il passe à A avec la probabilité 0,4.

a) Écrire la matrice de transition (colonnes : état actuel).

b) Vérifier que chaque colonne a pour somme 1.

Exercice 7 – Évolution d'une répartition

Avec la matrice $T = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et une répartition initiale $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$:

Calculer P_1 et P_2.

Exercice 8 – Part de marché à long terme

Déterminer la répartition stable $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour la matrice T précédente, avec $a + b = 1$.

Exercice 9 – Suites couplées non conservatives

Soit $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$ avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$.

a) Écrire la matrice A et calculer U_1, U_2, U_3.

b) Étudier la suite $s_n = u_n + v_n$.

Exercice 10 – Différence de deux suites couplées

On reprend le système précédent. Étudier la suite $d_n = u_n - v_n$, puis en déduire u_n et v_n.

Exercice 11 – Problème : deux réservoirs

Chaque heure, 20 % du contenu du réservoir A passe dans B, et 10 % de B passe dans A. Initialement, A contient 500 L et B 300 L.

a) Écrire la matrice de transition.

b) Calculer les volumes après une heure.

c) Déterminer l'état stable.

Exercice 12 – Problème : trois états

Une machine est chaque jour en état « bon » (B), « moyen » (M) ou « panne » (P). La matrice de transition (colonnes : état de la veille) est

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Si la machine est en bon état aujourd'hui, quelle est la répartition des probabilités demain, puis après-demain ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Système avec paramètre

Soit m un réel et le système $\begin{cases} 2x + my = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$.

a) Écrire le système sous la forme $AX = B$ et dire pour quelles valeurs de m la matrice A est inversible.

b) Résoudre le système pour $m = 4$.

Exercice 14 – Suite récurrente d'ordre 2

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b) Calculer A^2, puis en déduire u_2 et u_3 à partir de X_0.

Exercice 15 – Synthèse : suite couplée et état stable

Dans une ville, chaque année 15 % des habitants du centre partent en périphérie, et 5 % de la périphérie s'installent au centre. Au départ : 40 000 au centre, 60 000 en périphérie.

a) Écrire la matrice de transition et calculer la répartition après un an.

b) Déterminer la répartition stable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).