

## Plaquette 2 – Calcul matriciel : somme, produit et pièges

### Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Règles de calcul sur les matrices.

- **Somme** : seulement entre matrices de **même format**, terme à terme. **Multiple** :  $kA$  multiplie chaque coefficient par  $k$ .
- **Produit** :  $A$  de format  $n \times p$  et  $B$  de format  $p \times q$  donnent  $AB$  de format  $n \times q$ . Le nombre de **colonnes** de  $A$  doit égaier le nombre de **lignes** de  $B$ .
- **Coefficient du produit** : le terme de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de  $AB$  vaut

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

c'est-à-dire « ligne  $i$  de  $A$  contre colonne  $j$  de  $B$  ».

- **Matrice identité** :  $I_n$  (des 1 sur la diagonale, des 0 ailleurs) vérifie  $AI = IA = A$ .
- **Ce qui reste vrai** : associativité  $A(BC) = (AB)C$ , distributivité  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $k(AB) = (kA)B$ .
- **Ce qui devient faux** :
  - le produit n'est **pas commutatif** : en général  $AB \neq BA$  ;
  - $AB = 0$  n'entraîne pas  $A = 0$  ou  $B = 0$  ;
  - $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ , et non  $A^2 + 2AB + B^2$  ;
  - on ne « divise » jamais par une matrice : on multiplie par son **inverse**, quand elle en a une.
- **Matrices diagonales** : leur produit se fait terme à terme sur la diagonale, d'où des puissances immédiates.

#### Correction de l'exercice 1 – Somme, différence et multiple

Ces trois opérations se font **terme à terme** : on ajoute, soustrait ou multiplie chaque coefficient.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + 1 & -1 + 5 \\ 3 - 2 & 4 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 - 5 \\ 3 + 2 & 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

- **Contrôle** :  $(A + B) + (A - B) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 2A \checkmark$ .
- **Condition d'existence** : on ne peut additionner que des matrices de **même format**.  $A + C$  n'aurait aucun sens si  $C$  était de format  $2 \times 3$ .

**Réponse.**  $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ .

## Correction de l'exercice 2 - Produit de deux matrices carrées

Chaque coefficient s'obtient en faisant « **ligne contre colonne** ».

**Calcul de  $AB$ .**

- Ligne 1 contre colonne 1 :  $2 \times 1 + (-1) \times (-2) = 2 + 2 = 4$ .
- Ligne 1 contre colonne 2 :  $2 \times 5 + (-1) \times 0 = 10$ .
- Ligne 2 contre colonne 1 :  $3 \times 1 + 4 \times (-2) = 3 - 8 = -5$ .
- Ligne 2 contre colonne 2 :  $3 \times 5 + 4 \times 0 = 15$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

**Calcul de  $BA$ ,** en refaisant tout dans l'autre sens :

- $1 \times 2 + 5 \times 3 = 17$  ;  $1 \times (-1) + 5 \times 4 = 19$  ;  $-2 \times 2 + 0 = -4$  ;  $-2 \times (-1) + 0 = 2$ .

$$BA = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Constat** :  $AB \neq BA$ . Le produit matriciel **n'est pas commutatif** : c'est la première grande différence avec le calcul dans  $\mathbb{R}$ .
- Conséquence de rédaction : on précise toujours de quel côté on multiplie (« on multiplie **à gauche** par  $A$  »).

**Réponse.**  $AB = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$  : le produit n'est pas commutatif.

## Correction de l'exercice 3 - Des formats différents

a)  $C$  est de format  $2 \times 3$  et  $D$  de format  $3 \times 2$ .

- $CD$  : les 3 colonnes de  $C$  correspondent aux 3 lignes de  $D$  ✓. Format du produit :  $2 \times 2$ .
- $DC$  : les 2 colonnes de  $D$  correspondent aux 2 lignes de  $C$  ✓. Format :  $3 \times 3$ .
- Les deux produits existent, mais ils n'ont **même pas le même format** : la question « sont-ils égaux ? » n'a aucun sens.

b) On calcule les quatre coefficients de  $CD$  :

- $(1; 1) : 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 3 = 2 - 2 - 3 = -3$ .
- $(1; 2) : 1 \times 1 + 2 \times 0 + (-1) \times 2 = 1 - 2 = -1$ .
- $(2; 1) : 0 \times 2 + 3 \times (-1) + 4 \times 3 = -3 + 12 = 9$ .
- $(2; 2) : 0 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 2 = 8$ .

$$CD = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

**Réponse.** a)  $CD$  ( $2 \times 2$ ) et  $DC$  ( $3 \times 3$ ) · b)  $CD = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ .

## Correction de l'exercice 4 - Un produit nul

a) On applique la règle ligne contre colonne :

- $(1; 1) : 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$  ;  $(1; 2) : 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ .
- $(2; 1) : -1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$  ;  $(2; 2) : -1 + 1 = 0$ .

$$EF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Dans  $\mathbb{R}$ , un produit nul entraîne qu'un facteur est nul. **Ici, ni  $E$  ni  $F$  n'est la matrice nulle**, et pourtant leur produit l'est.

- Conséquence importante : on **ne peut pas simplifier** une égalité matricielle. De  $AB = AC$  on ne déduit pas  $B = C$ , sauf si  $A$  est inversible.
- Contrôle :  $FE = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  également ici, mais ce n'est pas une règle générale.
- **Lien avec l'inversibilité** :  $E$  et  $F$  ont toutes deux un déterminant nul ( $1 \times 1 - (-1)(-1) = 0$ ), donc aucune n'est inversible. Ce n'est pas un hasard.

**Réponse.** a)  $EF = 0$  · b) un produit nul n'implique pas qu'un facteur soit nul.

### Correction de l'exercice 5 - Une identité remarquable qui tombe

a) On a vu  $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ . On élève au carré :

- $(1; 1) : 3 \times 3 + 4 \times 1 = 13 ; (1; 2) : 3 \times 4 + 4 \times 4 = 28.$
- $(2; 1) : 1 \times 3 + 4 \times 1 = 7 ; (2; 2) : 1 \times 4 + 4 \times 4 = 20.$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 28 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$$

b) On calcule les trois termes :

- $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}.$
- $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 + 8 - 9 & -6 + 20 + 5 \\ 18 - 10 - 2 & 13 + 30 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 6 & 33 \end{pmatrix}.$
- Les deux résultats sont **différents** : l'identité remarquable est fausse pour les matrices.

c) La formule correcte vient du développement, **sans jamais échanger l'ordre des facteurs** :

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

- Ici  $BA = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ , et  $A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 13 & 28 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$  ✓ : on retrouve bien  $(A + B)^2$ .
- On ne peut regrouper  $AB + BA$  en  $2AB$  **que si  $A$  et  $B$  commutent**.

**Réponse.** a)  $\begin{pmatrix} 13 & 28 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$  · b)  $\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 6 & 33 \end{pmatrix}$ , différent · c)  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ .

### Correction de l'exercice 6 - Matrices diagonales

a) Pour une matrice diagonale, le produit se fait **coefficient par coefficient sur la diagonale** :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}; T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) Conjecture : } T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

**Démonstration par récurrence.**

$$\text{— Initialisation : } T^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} \checkmark.$$

— **Hérédité** : supposons  $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Alors

$$T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} 2^n \times 2 & 0 \\ 0 & 3^n \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

— La propriété est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

— **Vérification** :  $T^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix} \checkmark$ .

**Réponse.** a)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ . b)  $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 7 - Une matrice nilpotente

a)  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

— Donc  $N^3 = N^2 \times N = 0$ , et toutes les puissances suivantes sont nulles.

— Une telle matrice non nulle dont une puissance est nulle s'appelle **nilpotente** : c'est encore un comportement impossible dans  $\mathbb{R}$ .

b)  $I_2$  et  $N$  **commutent** (l'identité commute avec tout), donc la formule du binôme s'applique :

$$(I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k = I_2 + nN$$

— Tous les termes avec  $k \geq 2$  sont nuls puisque  $N^2 = 0$ .

— Donc  $(I_2 + N)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

— **Vérification directe** pour  $n = 5$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$ .

— **Attention** : le binôme n'est utilisable que parce que les deux matrices commutent.

**Réponse.** a)  $N^2 = N^3 = 0$ . b)  $(I_2 + N)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 8 - Combinaison linéaire de matrices

On écrit la combinaison et on identifie **coefficient par coefficient** :

$$aA + bB = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ b & a \end{pmatrix}$$

— Coefficient (1 ; 1) :  $a = 3$ .

— Coefficient (2 ; 1) :  $b = 2$ .

— Coefficient (1 ; 2) :  $2a + b = 8$ , et  $2 \times 3 + 2 = 8 \checkmark$  : cohérent.

— Coefficient (2 ; 2) :  $a = 3 \checkmark$  : cohérent également.

**Conclusion.**  $a = 3$  et  $b = 2$ , et l'on vérifie :

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = C$$

— **Méthode** : une égalité de matrices équivaut à l'égalité de **tous** les coefficients — ici quatre équations, dont deux redondantes. Si l'une des équations avait été contradictoire, aucun couple n'aurait convenu.

**Réponse.**  $a = 3$  et  $b = 2$ .

### Correction de l'exercice 9 - Produit matrice-colonne

a) Le produit d'une matrice  $2 \times 2$  par une colonne  $2 \times 1$  est une colonne  $2 \times 1$  :

$$AX = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

b) L'égalité de deux colonnes équivaut à l'égalité de leurs coefficients :

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

— En additionnant les deux lignes :  $5x = 10$ , donc  $x = 2$ .

— En reportant dans la seconde :  $4 + y = 5$ , donc  $y = 1$ .

— **Vérification** :  $3 \times 2 - 1 = 5$  ✓ et  $2 \times 2 + 1 = 5$  ✓.

— **Conclusion** :  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

— **L'idée à retenir** : tout système linéaire s'écrit  $AX = B$ . Le chapitre suivant le résout d'un coup, en multipliant par  $A^{-1}$ .

**Réponse.** a)  $AX = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + y \end{pmatrix}$ . b)  $x = 2$ ,  $y = 1$ .

### Correction de l'exercice 10 - Une matrice idempotente

a) On calcule les quatre coefficients :

—  $(1; 1) : 2 \times 2 + (-2) \times 1 = 2$  ;  $(1; 2) : 2 \times (-2) + (-2)(-1) = -2$ .

—  $(2; 1) : 1 \times 2 + (-1) \times 1 = 1$  ;  $(2; 2) : 1 \times (-2) + (-1)(-1) = -1$ .

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P$$

— La matrice vérifie  $P^2 = P$  : on dit qu'elle est **idempotente**.

b) Par récurrence immédiate : si  $P^n = P$ , alors  $P^{n+1} = P^n \times P = P \times P = P^2 = P$ .

— Donc  $P^n = P$  pour tout  $n \geq 1$ .

— **Remarque** : dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $x^2 = x$  n'a que deux solutions, 0 et 1. Chez les matrices, il en existe une infinité — encore une règle qui saute.

— Contrôle :  $\det P = 2 \times (-1) - (-2) \times 1 = 0$ , donc  $P$  n'est pas inversible : c'est cohérent, une matrice inversible vérifiant  $P^2 = P$  serait forcément  $I$ .

**Réponse.** a)  $P^2 = P$  · b)  $P^n = P$  pour tout  $n \geq 1$ .

### Correction de l'exercice 11 - Une équation matricielle

a)  $H^2 = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ .

—  $5H + 2I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$  ✓.

— L'égalité est vérifiée.

b) On isole  $I_2$  pour faire apparaître un produit égal à l'identité :

—  $H^2 - 5H = 2I_2$ , donc  $H(H - 5I_2) = 2I_2$ .

— En divisant par 2 :  $H \times \frac{1}{2}(H - 5I_2) = I_2$ .

— Donc  $H$  est inversible et

$$H^{-1} = \frac{1}{2}(H - 5I_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** :  $H \times H^{-1} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$ .

— **La méthode est générale** : toute relation  $H^2 = aH + bI$  avec  $b \neq 0$  fournit l'inverse sans aucune formule à retenir.

**Réponse.** a) les deux valent  $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ . b)  $H^{-1} = \frac{1}{2}(H - 5I_2)$ .

## Correction de l'exercice 12 - Matrice de stock et de prix

On met les prix dans une **colonne**, pour que le produit ait un sens :

$$Q = \begin{pmatrix} 40 \\ 75 \end{pmatrix}$$

—  $S$  est de format  $3 \times 2$  et  $Q$  de format  $2 \times 1$  : le produit  $SQ$  existe et donne une colonne  $3 \times 1$  — une valeur par atelier.

$$SQ = \begin{pmatrix} 12 \times 40 + 5 \times 75 \\ 8 \times 40 + 9 \times 75 \\ 15 \times 40 + 2 \times 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 + 375 \\ 320 + 675 \\ 600 + 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 855 \\ 995 \\ 750 \end{pmatrix}$$

**Conclusion.** Les stocks valent 855 €, 995 € et 750 €.

— **Contrôle global** : le stock total vaut  $855 + 995 + 750 = 2\,600$  €. Par un autre chemin, 35 unités de  $P_1$  et 16 de  $P_2$  donnent  $35 \times 40 + 16 \times 75 = 1\,400 + 1\,200 = 2\,600$  € ✓.

— **Le sens du produit matriciel** : chaque ligne du résultat est une somme « quantités  $\times$  prix ». C'est exactement pour cela que le produit se fait ligne contre colonne.

**Réponse.**  $SQ = \begin{pmatrix} 855 \\ 995 \\ 750 \end{pmatrix}$  : 855 €, 995 € et 750 €.

## Correction de l'exercice 13 - Deux matrices qui commutent

a)  $AB = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 3 + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

—  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

— Ici  $AB = BA$  : ces deux matrices **commutent**. Ce n'est pas contradictoire avec le cours, qui dit seulement que la commutativité n'est pas garantie.

b)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + 4N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N^2 = 0$ .

— Donc  $(AB)^n = (I_2 + 4N)^n = I_2 + 4nN$  (tous les autres termes du binôme sont nuls).

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & 4n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** pour  $n = 2$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$ .

— **La famille complète** : les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  commutent entre elles, et leur produit revient à **ajouter** les coefficients  $a$ .

**Réponse.** a)  $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . b)  $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & 4n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 14 - Le carré d'une somme, cas favorable

a) On développe **sans échanger l'ordre des facteurs** :

- $(A + I)^2 = (A + I)(A + I) = A^2 + AI + IA + I^2$ .
- Or  $AI = IA = A$  (l'identité commute avec **toute** matrice) et  $I^2 = I$ .
- Donc  $(A + I)^2 = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I$ .
- **C'est ici que l'identité remarquable redevient valable** : elle exige que les deux matrices commutent, ce qui est automatique avec  $I$ .

b) On multiplie le résultat précédent par  $A + I$  :

- $(A + I)^3 = (A^2 + 2A + I)(A + I) = A^3 + A^2 + 2A^2 + 2A + A + I$ .
- Soit  $(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$ .
- On retrouve les coefficients du binôme 1, 3, 3, 1, exactement comme dans  $\mathbb{R}$  — et pour la même raison :  $A$  et  $I$  commutent.

**Réponse.** a)  $AI = IA = A$  donc  $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$ . b)  $A^3 + 3A^2 + 3A + I$ .

### Correction de l'exercice 15 - Bilan : calculer et conclure

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times (-1) & 2 \times 1 + 0 \\ -1 \times 2 + 0 & -1 \times 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

—  $2A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \checkmark$ .

b) De  $A^2 = 2A - I_2$  on tire  $I_2 = 2A - A^2 = A(2I_2 - A)$ .

— Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = 2I_2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

— Vérification :  $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 + 1 & -2 + 2 \\ 0 & 1 + 0 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$ .

c) Notons  $P(n)$  : «  $A^n = nA - (n - 1)I_2$  ».

— **Initialisation** :  $n = 1$  donne  $A = A - 0 = A \checkmark$ .

— **Hérédité** : supposons  $A^n = nA - (n - 1)I_2$ . Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = nA^2 - (n - 1)A = n(2A - I_2) - (n - 1)A$$

—  $= 2nA - nI_2 - nA + A = (n + 1)A - nI_2$  : c'est bien la formule au rang  $n + 1 \checkmark$ .

— **Calcul de  $A^{10}$**  :  $A^{10} = 10A - 9I_2 = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}$ .

**Réponse.** a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ . b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . c)  $A^{10} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}$ .