

Plaquette 3 - Matrice inverse et résolution de systèmes

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes.

- **Déterminant d'une matrice** 2×2 : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det A = ad - bc$.
- **Critère d'inversibilité** : A est inversible **si et seulement si** $\det A \neq 0$.
- **Inverse d'une matrice** 2×2 :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On échange les termes de la diagonale, on change le signe des deux autres, on divise par le déterminant.

- **Vérification obligatoire** : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- **Système linéaire** : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ s'écrit $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.
- **Résolution** : si A est inversible, le système a une **unique** solution $X = A^{-1}B$. Si $\det A = 0$, il a soit aucune solution, soit une infinité.
- **Inverse d'un produit** : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ — l'ordre s'inverse.
- **Équation matricielle** : on résout comme une équation du premier degré, en multipliant **du bon côté** par l'inverse.

Correction de l'exercice 1 - Déterminant et inversibilité

On calcule le déterminant $ad - bc$ dans chaque cas.

a) $\det M = 3 \times 2 - 5 \times 1 = 6 - 5 = 1 \neq 0$: **M est inversible.**

b) $\det K = 4 \times 3 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$: **K n'est pas inversible.**

— On le voit aussi directement : la deuxième ligne est la moitié de la première. Les deux lignes sont **proportionnelles**, c'est la signature d'un déterminant nul.

c) $\det L = 5 \times 2 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1 \neq 0$: **L est inversible.**

— **Interprétation** : $\det A \neq 0$ signifie que le système $AX = B$ a une solution unique pour **tout** second membre B . Un déterminant nul signale au contraire un système dégénéré.

Réponse. a) oui ($\det = 1$) · b) non ($\det = 0$) · c) oui ($\det = 1$).

Correction de l'exercice 2 - Calculer une inverse

On applique la formule du cours :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

— $\det M = 1$, donc aucune division à faire : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérification (indispensable) :

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 5 \times (-1) & 3 \times (-5) + 5 \times 3 \\ 1 \times 2 + 2 \times (-1) & 1 \times (-5) + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On peut aussi vérifier $M^{-1}M = I_2$, mais pour des matrices carrées, l'une des deux égalités suffit.
- **Les gestes de la formule** : échanger a et d , changer le signe de b et de c , diviser par le déterminant. Ne pas changer le signe de a et d est l'erreur la plus fréquente.

Réponse. $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 - Un système par l'inverse

Étape 1 : écriture matricielle. Le système s'écrit $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : inversibilité. $\det A = 3 \times 5 - (-1) \times 2 = 15 + 2 = 17 \neq 0$: le système a une solution unique.

Étape 3 : l'inverse.

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étape 4 : le produit.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5 \times 7 + 1 \times 16 \\ -2 \times 7 + 3 \times 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 51 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Vérification dans le système** : $3 \times 3 - 2 = 7 \checkmark$ et $2 \times 3 + 5 \times 2 = 16 \checkmark$.
- **Conclusion** : $x = 3$ et $y = 2$.

Réponse. $x = 3$ et $y = 2$.

Correction de l'exercice 4 - Quand le déterminant est nul

a) La matrice est $K = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, de déterminant $12 - 12 = 0$.

— K n'est pas inversible : on **ne peut pas** écrire $X = K^{-1}B$. Il faut revenir au système.

b) **Système** (S_1). La première ligne est le double de la seconde : les deux équations disent la même chose.

— Le système se réduit à $2x + 3y = 5$, soit $y = \frac{5-2x}{3}$.

— Il y a une **infinité de solutions** : tous les couples $\left(x; \frac{5-2x}{3}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ — c'est une droite entière.

Système (S_2). En divisant la première ligne par 2 : $2x + 3y = 5$.

— Mais la seconde ligne affirme $2x + 3y = 7$: contradiction.

— Le système n'a **aucune solution**.

— **Le résumé à retenir** : $\det A \neq 0$ donne une solution unique ; $\det A = 0$ donne soit une infinité de solutions, soit aucune — géométriquement, deux droites confondues ou deux droites parallèles distinctes.

Réponse. a) $\det = 0$ · b) (S_1) : infinité de solutions ; (S_2) : aucune.

Correction de l'exercice 5 - Un paramètre dans la matrice

a) On calcule le déterminant en fonction de m :

- $\det A_m = m(m-1) - 2 \times 3 = m^2 - m - 6$.
- On factorise ce trinôme : les racines sont 3 et -2 (somme 1, produit -6), donc $\det A_m = (m-3)(m+2)$.
- A_m est inversible si et seulement si $\det A_m \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq 3$ et $m \neq -2$.

b) Pour $m = 4$: $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $\det A_4 = (4-3)(4+2) = 6$.

$$A_4^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 2 \times (-3) & 4 \times (-2) + 2 \times 4 \\ 3 \times 3 + 3 \times (-3) & 3 \times (-2) + 3 \times 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$.

Réponse. a) $m \neq 3$ et $m \neq -2$ · b) $A_4^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 - Deux seconds membres

a) $\det L = 5 \times 2 - 3 \times 3 = 1$, donc

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

— Vérification : $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-9 & -15+15 \\ 6-6 & -9+10 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$.

b) **Tout l'intérêt de l'inverse** : une fois calculée, elle résout **tous** les systèmes de même matrice.

— Premier second membre : $X = L^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-9 \\ -12+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : $5 \times (-1) + 3 \times 3 = 4 \checkmark$ et $3 \times (-1) + 2 \times 3 = 3 \checkmark$.

— Second second membre : $X = L^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : $25 - 24 = 1 \checkmark$ et $15 - 16 = -1 \checkmark$.

Réponse. a) $L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ · b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 - L'inverse d'un produit

a) Il suffit de vérifier que le produit de AB par $B^{-1}A^{-1}$ vaut l'identité.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

— On a utilisé l'**associativité** du produit, seul outil autorisé ici.

— De même $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I$.

— Donc AB est inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

— **L'ordre s'inverse** : écrire $A^{-1}B^{-1}$ est faux en général, exactement comme « enlever ses chaussures puis ses chaussettes ».

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (déterminant 1).

$$- AB = \begin{pmatrix} 3+10 & 5 \\ 1+4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ de déterminant } 26 - 25 = 1.$$

$$- (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$- B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4-1 & 10+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \checkmark.$$

Réponse. a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ · b) les deux valent $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre une équation matricielle

On procède comme pour une équation du premier degré, en respectant **le côté** où l'on multiplie.

Étape 1 : isoler AX .

$$- AX = C - B = \begin{pmatrix} 7-1 & 10-4 \\ 3-0 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Étape 2 : multiplier à gauche par A^{-1} .

$$- \det A = 1, \text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$- X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 5 \times 3 & 2 \times 6 - 5 \times 4 \\ -6 + 9 & -6 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vérification.

$$- AX = \begin{pmatrix} -9+15 & -24+30 \\ -3+6 & -8+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \checkmark, \text{ et } AX + B = C \checkmark.$$

— **Le piège** : multiplier à **droite** par A^{-1} donnerait AXA^{-1} , qui ne se simplifie pas. Le côté compte.

Réponse. $X = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 9 - Un système 3×3

On peut écrire $AX = B$, mais avec un format 3×3 il est plus rapide de **combinaison des lignes** (méthode du pivot), qui est exactement ce que fait le calcul de l'inverse.

Étape 1 : éliminer x .

$$- L_2 - L_1 : y + 2z = 8.$$

$$- L_3 - L_1 : 3y + 8z = 30.$$

Étape 2 : éliminer y .

$$- 3 \times (y + 2z) = 3y + 6z = 24, \text{ à soustraire de } 3y + 8z = 30 : 2z = 6, \text{ donc } z = 3.$$

Étape 3 : remonter.

$$- y + 2 \times 3 = 8, \text{ donc } y = 2.$$

$$- x + 2 + 3 = 6, \text{ donc } x = 1.$$

Vérification dans les trois équations.

$$- 1 + 2 + 3 = 6 \checkmark ; 1 + 4 + 9 = 14 \checkmark ; 1 + 8 + 27 = 36 \checkmark.$$

- **Remarque** : la matrice du système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, inversible ; la solution est donc unique.

Réponse. $x = 1, y = 2, z = 3$.

Correction de l'exercice 10 - Un mélange à composer

On note x et y les volumes (en litres) des solutions A et B .

Mise en équations.

- Volume total : $x + y = 12$.
- Masse de sel : $20x + 50y = 30 \times 12 = 360$.

Écriture matricielle : $MX = B$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 20 & 50 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 360 \end{pmatrix}$$

Résolution.

- $\det M = 50 - 20 = 30 \neq 0$: solution unique.
- $M^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 50 & -1 \\ -20 & 1 \end{pmatrix}$.
- $X = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 50 \times 12 - 360 \\ -20 \times 12 + 360 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 240 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Il faut 8 L de solution A et 4 L de solution B .

- **Vérification** : $8 + 4 = 12$ L ✓ et $20 \times 8 + 50 \times 4 = 160 + 200 = 360$ g, soit 30 g/L ✓.

Réponse. 8 L de solution A et 4 L de solution B .

Correction de l'exercice 11 - Chiffrer avec une matrice

On découpe en deux blocs : MA puis TH.

Bloc MA : $M = 12, A = 0$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $u = 3 \times 12 + 3 \times 0 = 36 \equiv 10 \pmod{26}$: lettre K.
- $v = 2 \times 12 + 5 \times 0 = 24$: lettre Y.

Bloc TH : $T = 19, H = 7$.

- $u = 3 \times 19 + 3 \times 7 = 57 + 21 = 78 = 26 \times 3 \equiv 0$: lettre A.
- $v = 2 \times 19 + 5 \times 7 = 38 + 35 = 73 = 26 \times 2 + 21 \equiv 21$: lettre V.

Conclusion. MATH devient **KYAV**.

- **Ce qui fait la force du procédé** : une même lettre n'est pas toujours codée pareil. Ici les deux A du message clair et du chiffré ne se correspondent pas — ce qui met en échec l'analyse des fréquences, seule faiblesse du chiffre de César.

Réponse. MATH devient KYAV.

Correction de l'exercice 12 - Déchiffrer avec l'inverse

a) $\det A = 3 \times 5 - 3 \times 2 = 15 - 6 = 9$.

- Pour inverser la matrice modulo 26, il faut que 9 soit inversible modulo 26, donc que $\text{pgcd}(9; 26) = 1$: c'est le cas.

— Inverse de 9 : $9 \times 3 = 27 = 26 + 1 \equiv 1 \pmod{26}$, donc $9^{-1} \equiv 3$.

b) La formule usuelle donne $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, où « diviser par 9 » signifie **multiplier par 3 modulo 26** :

— $A^{-1} \equiv 3 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \pmod{26} \checkmark$.

— Contrôle : $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 & 78 \\ 130 & 79 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{26} \checkmark$ (car $105 = 104 + 1$, $78 = 26 \times 3$, $130 = 26 \times 5$, $79 = 78 + 1$).

Déchiffrement de KYAV.

— Bloc KY : $\begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$. $x = 15 \times 10 + 17 \times 24 = 150 + 408 = 558$, et $558 = 26 \times 21 + 12$, donc $x = 12$: M. $y = 20 \times 10 + 9 \times 24 = 200 + 216 = 416 = 26 \times 16 \equiv 0$: A.

— Bloc AV : $\begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix}$. $x = 17 \times 21 = 357 = 26 \times 13 + 19$, donc 19 : T.
 $y = 9 \times 21 = 189 = 26 \times 7 + 7$, donc 7 : H.

— On retrouve **MATH** $\checkmark$.

Réponse. a) $\det A = 9$, inversible car $\text{pgcd}(9; 26) = 1$ · b) KYAV redonne MATH.

Correction de l'exercice 13 - Trois produits, trois contraintes

Mise en équations.

- Total : $x + y + z = 200$.
- Deuxième contrainte : $x = y + z$, soit $x - y - z = 0$.
- Recette : $10x + 8y + 5z = 1\,740$.

Étape 1 : trouver x . On additionne les deux premières équations :

- $(x + y + z) + (x - y - z) = 200 + 0$, donc $2x = 200$ et $x = 100$.
- Il reste alors $y + z = 100$.

Étape 2 : utiliser la recette.

- $10 \times 100 + 8y + 5z = 1\,740$, donc $8y + 5z = 740$.
- On remplace z par $100 - y$: $8y + 5(100 - y) = 740$, soit $3y + 500 = 740$.
- $3y = 240$, donc $y = 80$, puis $z = 100 - 80 = 20$.

Vérification des trois contraintes.

- $100 + 80 + 20 = 200 \checkmark$ · $80 + 20 = 100 = x \checkmark$.
- Recette : $10 \times 100 + 8 \times 80 + 5 \times 20 = 1\,000 + 640 + 100 = 1\,740 \text{ €} \checkmark$.
- **Conclusion** : 100 articles A, 80 articles B et 20 articles C.

Réponse. $x = 100$, $y = 80$, $z = 20$.

Correction de l'exercice 14 - Une matrice et son carré

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+6 \\ 1+3 & 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

— $4A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 4A + I_2 = \begin{pmatrix} 3-4+1 & 8-8 \\ 4-4 & 11-12+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$.

b) De $A^2 - 4A + I_2 = 0$ on tire $I_2 = 4A - A^2 = A(4I_2 - A)$.

— Donc $A^{-1} = 4I_2 - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Contrôle par la formule. $\det A = 3 - 2 = 1$, donc

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— Les deux méthodes coïncident ✓.

— **Pourquoi cela marche toujours** : toute matrice 2×2 vérifie

$$A^2 - (a + d)A + (\det A)I = 0. \text{ Ici } a + d = 4 \text{ et } \det A = 1.$$

Réponse. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$. b) $A^{-1} = 4I_2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 15 - Bilan : inverses et systèmes

a) $\det A = 2 \times 4 - 7 \times 1 = 1$, donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— Vérification : $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 7 & -14 + 14 \\ 4 - 4 & -7 + 8 \end{pmatrix} = I_2$ ✓.

b) Le système s'écrit $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$, donc

— $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 11 - 7 \times 7 \\ -11 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 - 49 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

— **Vérification** : $2 \times (-5) + 7 \times 3 = -10 + 21 = 11$ ✓ et $-5 + 12 = 7$ ✓.

c) Le système a une unique solution si et seulement si le déterminant est non nul.

— $\det = m \times m - 4 \times 1 = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2)$.

— Il s'annule pour $m = 2$ et $m = -2$: ce sont les deux valeurs pour lesquelles le système n'a **pas** une solution unique.

— Pour $m = 2$: le système devient $2x + 4y = 1$ et $x + 2y = 3$, soit $2x + 4y = 6$: incompatible, aucune solution.

Réponse. a) $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. b) $x = -5, y = 3$. c) $m = 2$ ou $m = -2$.