

## Plaque 4 - Puissances de matrices : conjecture, récurrence et décomposition

### Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Méthodes de calcul de $A^n$ .

- **Conjecture et récurrence** : on calcule  $A^2, A^3$ , on devine la forme générale, puis on démontre par récurrence en écrivant  $A^{n+1} = A^n \times A$ .
- **Matrice nilpotente** :  $N$  est nilpotente si  $N^k = 0$  pour un certain  $k$ . Alors toutes les puissances suivantes sont nulles.
- **Binôme de Newton matriciel** — valable **uniquement si  $A$  et  $B$  commutent** :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Comme  $\lambda I$  commute avec tout, la décomposition  $A = \lambda I + N$  est toujours exploitable.

- **Relation de degré 2** : si  $A^2 = aA + bI$ , alors par récurrence  $A^n = a_n A + b_n I$ , avec des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  que l'on détermine.
- **Décomposition**  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale : alors

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

car les  $P^{-1}P$  intermédiaires se simplifient. La puissance d'une matrice diagonale se lit coefficient par coefficient.

- **Matrices périodiques** : si  $A^k = I$ , alors  $A^n$  ne dépend que du **reste** de  $n$  modulo  $k$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Conjecturer puis démontrer

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

—  $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) **Conjecture** :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**Démonstration par récurrence.** Notons  $P(n)$  cette égalité.

— **Initialisation** :  $n = 1$  donne  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \checkmark.$

— **Hérédité** : supposons  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 2 + 2n \times 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

—  $P(n+1)$  est vraie : la formule vaut pour tout  $n \geq 1$ .

— **Contrôle** :  $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ce que confirme le calcul de  $A^5 \times A^5$ .

**Réponse.** a)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  · b)  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 2 - Décomposer en identité plus nilpotente

a)  $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  :  $N$  est **nilpotente**.

b)  $2I_2$  et  $N$  commutent (l'identité commute avec tout), donc le binôme s'applique :

$$A^n = (2I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} N^k$$

— Tous les termes avec  $k \geq 2$  sont nuls, il ne reste que les deux premiers :

—  $A^n = 2^n I_2 + n \times 2^{n-1} N$ .

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

— **Vérification** pour  $n = 3$  :  $\begin{pmatrix} 8 & 3 \times 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ , ce que donne bien le calcul direct de  $A^3$  ✓.

— **La méthode est générale** pour toute matrice triangulaire dont la diagonale est constante.

**Réponse.** a)  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N^2 = 0$  · b)  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 3 - Une matrice périodique

a)  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + (-1) \times 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ .

—  $J^3 = J^2 \times J = -J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

—  $J^4 = (J^2)^2 = (-I_2)^2 = I_2$ .

— Les puissances sont donc **périodiques de période 4** :  $J, -I_2, -J, I_2$ , puis on recommence.

b) On divise l'exposant par la période :

—  $2\,026 = 4 \times 506 + 2$ , donc  $J^{2026} = (J^4)^{506} \times J^2 = I_2 \times (-I_2) = -I_2$ .

$$J^{2026} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— **Interprétation géométrique** :  $J$  est la matrice de la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Quatre quarts de tour ramènent au départ, et 2 026 quarts de tour équivalent à un demi-tour ✓.

**Réponse.** a)  $J^2 = -I_2, J^3 = -J, J^4 = I_2$  · b)  $J^{2026} = -I_2$ .

### Correction de l'exercice 4 - Une matrice d'ordre 3

a)  $R^2 = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times (-1) & 0 \times 1 + 1 \times (-1) \\ -1 \times 0 + (-1)(-1) & -1 \times 1 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$- R^3 = R^2 \times R = \begin{pmatrix} 0+1 & -1+1 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

— La matrice est donc **d'ordre 3** : ses puissances se répètent avec la période 3.

b)  $100 = 3 \times 33 + 1$ , donc

$$- R^{100} = \left(R^3\right)^{33} \times R = I_2 \times R = R.$$

$$- \text{Pour l'inverse : } R^3 = I_2 \text{ s'écrit } R \times R^2 = I_2, \text{ donc } R^{-1} = R^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$- \textbf{Vérification} : \det R = 0 \times (-1) - 1 \times (-1) = 1, \text{ et la formule donne } R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \checkmark.$$

**Réponse.** a)  $R^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $R^3 = I_2$ . b)  $R^{100} = R$  et  $R^{-1} = R^2$ .

### Correction de l'exercice 5 - Puissances par une relation de degré 2

$$\text{a) } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2+4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$- 3B - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \checkmark.$$

b) On multiplie  $B^n = a_n B + b_n I_2$  par  $B$  :

$$- B^{n+1} = a_n B^2 + b_n B = a_n (3B - 2I_2) + b_n B = (3a_n + b_n)B - 2a_n I_2.$$

$$- \text{Par identification : } a_{n+1} = 3a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = -2a_n.$$

On part de  $B^1 = B$ , donc  $a_1 = 1$  et  $b_1 = 0$  :

| $n$   | 1 | 2  | 3  | 4   | 5   |
|-------|---|----|----|-----|-----|
| $a_n$ | 1 | 3  | 7  | 15  | 31  |
| $b_n$ | 0 | -2 | -6 | -14 | -30 |

$$- \text{Détail : } a_3 = 3 \times 3 + (-2) = 7 \text{ et } b_3 = -2 \times 3 = -6.$$

$$- B^5 = 31B - 30I_2 = \begin{pmatrix} 31 & 62 \\ 0 & 62 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 62 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

— **Vérification** : la forme générale est  $a_n = 2^n - 1$  et  $b_n = 2 - 2^n$ , donc

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}; \text{ pour } n = 5 : \begin{pmatrix} 1 & 62 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \checkmark.$$

**Réponse.** a) les deux valent  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ . b)  $B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 62 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 6 - Une décomposition PDP<sup>-1</sup>

$$\text{a) } \det P = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1, \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$- PD = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 3 \times (-1) & -1 + 3 \\ 2 - 6 & -1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) On calcule  $A^2$  en faisant apparaître les simplifications :

$$- A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

— Par récurrence immédiate,  $A^n = PD^nP^{-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

— Or  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ , ce qui rend le calcul immédiat.

**Calcul de  $A^4$  :**  $D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$ .

—  $PD^4 = \begin{pmatrix} 1 & 81 \\ 1 & 162 \end{pmatrix}$ , puis

—  $A^4 = \begin{pmatrix} 2-81 & -1+81 \\ 2-162 & -1+162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -79 & 80 \\ -160 & 161 \end{pmatrix}$ .

— **Formule générale :**  $A^n = \begin{pmatrix} 2-3^n & 3^n-1 \\ 2-2 \times 3^n & 2 \times 3^n-1 \end{pmatrix}$ ; pour  $n = 4$ , avec  $3^4 = 81$ , on retrouve le résultat ✓.

**Réponse.** a)  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ . b)  $A^4 = \begin{pmatrix} -79 & 80 \\ -160 & 161 \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 7 - La matrice de Fibonacci

a)  $F^2 = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

—  $F^3 = F^2 \times F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $F^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

b) Les coefficients 1, 1, 2, 3, 5 sont exactement les termes de la suite de Fibonacci.

**Conjecture :**

$$F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

— **Vérification pour  $n = 5$  :** la suite vaut  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 2$ ,  $u_4 = 3$ ,  $u_5 = 5$ ,  $u_6 = 8$ .

— La formule annonce  $F^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ , et le calcul  $F^4 \times F = \begin{pmatrix} 5+3 & 5 \\ 3+2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  ✓.

— **L'hérédité en une ligne :**  $F^{n+1} = F^n \times F = \begin{pmatrix} u_{n+1}+u_n & u_{n+1} \\ u_n+u_{n-1} & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$  ✓.

— **Application :** cette écriture permet de calculer  $u_{100}$  en une dizaine de produits matriciels, au lieu de cent additions.

**Réponse.** a)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . b)  $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ .

### Correction de l'exercice 8 - Une nilpotente d'ordre 3

a) On calcule  $N^2$  ligne contre colonne :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Détail du seul coefficient non nul : ligne 1 de  $N$  contre colonne 3 de  $N$  :  $0 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 0 = 3$ .

—  $N^3 = N^2 \times N = 0$  : la matrice est nilpotente **d'ordre 3**.

b)  $I_3$  et  $N$  commutent, donc le binôme s'applique et s'arrête au terme en  $N^2$  :

$$(I_3 + N)^n = I_3 + nN + \binom{n}{2}N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$$

— En coefficients :

$$(I_3 + N)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n + \frac{3n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Contrôle pour  $n = 2$**  : le coefficient  $(1; 3)$  vaut  $4 + 3 = 7$ . Calcul direct :  $(I_3 + N)^2$  a pour coefficient  $(1; 3)$  :  $1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 1 = 7 \checkmark$ .

**Réponse.** a)  $N^2$  n'a que le coefficient 3 en haut à droite,  $N^3 = 0$  · b)  $I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ .

### Correction de l'exercice 9 - Les racines carrées de l'identité

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 & 0 \\ 3 \times 1 + (-1) \times 3 & 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$ .

— Détail du coefficient  $(2; 1)$  :  $3 \times 1 + (-1) \times 3 = 0$ .

b) Puisque  $A^2 = I_2$ , les puissances alternent :  $A^n = I_2$  si  $n$  est pair,  $A^n = A$  si  $n$  est impair.

— 2 026 est pair, donc  $A^{2026} = I_2$ .

— De  $A \times A = I_2$  on tire directement  $A^{-1} = A$  : la matrice est **son propre inverse**.

— Vérification par la formule :  $\det A = -1$ , donc  $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = A \checkmark$ .

— **Ce que cela montre** : l'équation  $X^2 = I$  a une **infinité** de solutions matricielles, alors que  $x^2 = 1$  n'a que deux solutions réelles.

**Réponse.** a)  $A^2 = I_2$  · b)  $A^{2026} = I_2$  et  $A^{-1} = A$ .

### Correction de l'exercice 10 - Somme de puissances

**Étape 1 : les puissances de  $A$ .**  $N^2 = 0$ , donc  $A^k = I_2 + kN$  pour tout  $k \geq 0$ .

**Étape 2 : la somme.** On somme les  $n + 1$  termes, de  $k = 0$  à  $k = n$  :

$$S = \sum_{k=0}^n (I_2 + kN) = (n+1)I_2 + \left( \sum_{k=0}^n k \right) N = (n+1)I_2 + \frac{n(n+1)}{2}N$$

— On a utilisé la somme des premiers entiers,  $0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

— En coefficients, avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  :

$$S = \begin{pmatrix} n+1 & \frac{5n(n+1)}{2} \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

**Vérification pour  $n = 2$ .**

—  $I_2 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

— La formule donne  $n+1 = 3$  et  $\frac{5 \times 2 \times 3}{2} = 15 \checkmark$ .

**Réponse.**  $S = \begin{pmatrix} n+1 & \frac{5n(n+1)}{2} \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$ .

## Correction de l'exercice 11 - Suites couplées

a) On pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . La relation s'écrit

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— Par récurrence immédiate :  $X_1 = AX_0$ ,  $X_2 = AX_1 = A^2X_0$ , et plus généralement

$$X_n = A^n X_0$$

— **C'est la formule à retenir** : une suite géométrique de raison  $A$ , exactement comme  $u_n = q^n u_0$  dans le cas réel.

b)  $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

—  $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 1 \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

—  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \times 7 + 5 \\ 7 + 2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix}$ .

— **Vérification par  $A^2$**  :  $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ , et  $A^2 X_0 = \begin{pmatrix} 15 + 4 \\ 12 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix} \checkmark$ .

— **Conclusion** :  $u_2 = 19$  et  $v_2 = 17$ .

**Réponse.** a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $X_n = A^n X_0$  · b)  $u_2 = 19$ ,  $v_2 = 17$ .

## Correction de l'exercice 12 - Deux villes

a) On note  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  les populations après  $n$  années.

— Ville A l'année suivante : elle garde 90 % des siens et reçoit 20 % de B :

$$a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,2 b_n.$$

— Ville B :  $b_{n+1} = 0,1 a_n + 0,8 b_n$ .

$$T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

— **Contrôle de cohérence** : chaque colonne a pour somme 1, ce qui traduit qu'aucun habitant ne disparaît.

b)  $X_1 = TX_0 = \begin{pmatrix} 0,9 \times 600 + 0,2 \times 400 \\ 0,1 \times 600 + 0,8 \times 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540 + 80 \\ 60 + 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 620 \\ 380 \end{pmatrix}$ .

—  $X_2 = TX_1 = \begin{pmatrix} 558 + 76 \\ 62 + 304 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 634 \\ 366 \end{pmatrix}$ .

— **Contrôle** :  $620 + 380 = 1\,000$  et  $634 + 366 = 1\,000 \checkmark$  — la population totale est constante.

— **Vers quoi cela tend** : l'état stable  $X$  vérifie  $TX = X$  avec  $a + b = 1\,000$ , soit  $0,1a = 0,2b$ , donc  $a = 2b$  : la répartition limite est  $\left(\frac{2\,000}{3}; \frac{1\,000}{3}\right) \approx (667; 333)$ .

**Réponse.** a)  $T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$  · b)  $(620; 380)$  puis  $(634; 366)$ .

### Correction de l'exercice 13 - Une conjecture sur les coefficients

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$- A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 12+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On observe  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = 13$  : chaque terme vaut 3 fois le précédent plus 1.

— La suite  $(c_n)$  vérifie  $c_{n+1} = 3c_n + 1$  : c'est une suite arithmético-géométrique.

— En ajoutant  $\frac{1}{2}$  :  $c_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(c_n + \frac{1}{2}\right)$ , donc  $c_n + \frac{1}{2} = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)3^{n-1} = \frac{3}{2} \times 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}$ .

— D'où  $c_n = \frac{3^n - 1}{2}$ .

#### Démonstration par récurrence de la formule matricielle.

— **Initialisation** :  $n = 1$  donne  $c_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \checkmark$ .

— **Hérédité** :  $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 0 \\ 3c_n + 1 & 1 \end{pmatrix}$ , et

$$3c_n + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2} = c_{n+1} \checkmark.$$

— **Contrôle** :  $c_4 = \frac{81-1}{2} = 40$ , et  $3 \times 13 + 1 = 40 \checkmark$ .

**Réponse.**  $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ \frac{3^n - 1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

### Correction de l'exercice 14 - Quand le binôme est interdit

$$a) AB = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$- BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

—  $AB \neq BA$  : les deux matrices **ne commutent pas**, le binôme de Newton est donc **interdit**.

$$b) A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$- A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \text{ et } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

$$- A^2 + 2AB + B^2 = A + 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \text{différent du carré réel.}$$

— La formule correcte donne bien le bon résultat :

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A + A + B + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \checkmark.$$

— **La règle de sécurité** : avant tout binôme matriciel, vérifier que les deux matrices commutent. C'est automatique pour  $\lambda I$  et  $N$ , pas ailleurs.

**Réponse.** a)  $AB \neq BA$  · b)  $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

## Correction de l'exercice 15 - Bilan : trois calculs de puissances

a) On écrit  $A = I_2 + 3N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N^2 = 0$ .

— Le binôme donne  $A^n = I_2 + 3nN = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

— Contrôle :  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$ .

b)  $D$  est diagonale, donc  $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ .

—  $5^n \rightarrow +\infty$  ;  $(-2)^n$  **n'a pas de limite** : il alterne entre valeurs positives et négatives, de valeur absolue croissante.

— Contrôle :  $D^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} \checkmark$ .

c)  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ .

— Les puissances alternent donc :  $M^n = I_2$  si  $n$  est pair,  $M$  si  $n$  est impair.

— 2 026 est pair :  $M^{2026} = I_2$ . 2 027 est impair :  $M^{2027} = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

— **Interprétation** :  $M$  échange les deux coordonnées ; l'appliquer deux fois ramène au point de départ.

**Réponse.** a)  $\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  · b)  $\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$  · c)  $I_2$  puis  $M$ .