# Plaquette 1 – Somme, produit, puissances et matrice inverse

## Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Formules du cours.**

— Une matrice $n \times p$ a $n$ lignes et $p$ colonnes. L'**addition** se fait terme à terme (mêmes dimensions requises).

— **Multiplication par un réel** : chaque coefficient est multiplié.

— **Produit** $AB$ : défini si le nombre de colonnes de $A$ égale le nombre de lignes de $B$. Le coefficient de la ligne $i$ et de la colonne $j$ est

$$\sum_k a_{ik}\, b_{kj}$$

— Le produit matriciel n'est **pas commutatif** : en général $AB \neq BA$.

— **Matrice identité** : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $AI = IA = A$.

— **Déterminant** d'une matrice $2 \times 2$ : pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = ad - bc$.

— $A$ est **inversible** si et seulement si $\det A \neq 0$, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— **Système linéaire** : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ s'écrit $AX = B$, et si $A$ est inversible, $X = A^{-1}B$.

— **Puissances** : $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ ($n$ facteurs), avec $A^0 = I$.

## Correction de l'exercice 1 – Somme et multiple

Les opérations se font **terme à terme**.

— $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

— $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

— $3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ et $2B = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, donc

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

**Réponse.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 2 – Produit de deux matrices

On calcule chaque coefficient comme une **somme de produits** ligne par colonne.

— $AB$ : coefficient $(1\,;1)$ : $2 \times 1 + (-1) \times (-2) = 4$ ; $(1\,;2)$ : $2 \times 5 + (-1) \times 0 = 10$ ; $(2\,;1)$ : $3 \times 1 + 4 \times (-2) = -5$ ; $(2\,;2)$ : $3 \times 5 + 0 = 15$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

— $BA$ : $(1\,;1)$ : $1\times 2 + 5\times 3 = 17$ ; $(1\,;2)$ : $1\times(-1) + 5\times 4 = 19$ ; $(2\,;1)$ : $-2\times 2 + 0 = -4$ ; $(2\,;2)$ : $-2\times(-1) + 0 = 2$.

$$BA = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

— **Constat** : $AB \neq BA$. Le produit matriciel n'est pas commutatif — c'est la différence majeure avec le calcul sur les nombres.

**Réponse.** $AB = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ : non commutatif.

## Correction de l'exercice 3 – Produit de dimensions différentes

a) $M$ est de dimension $2\times 3$ et $N$ de dimension $3\times 1$.

— Le nombre de colonnes de $M$ (3) égale le nombre de lignes de $N$ (3) : le produit est **défini**, de dimension $2\times 1$.

b) Première ligne : $1\times 2 + 2\times 1 + 0\times(-3) = 4$.

— Seconde ligne : $3\times 2 + (-1)\times 1 + 4\times(-3) = 6 - 1 - 12 = -7$.

$$MN = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

c) $N$ est $3\times 1$ et $M$ est $2\times 3$ : il faudrait que $1 = 2$. Le produit $NM$ n'est **pas défini**.

**Réponse.** a) oui, $2\times 1$ · b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ · c) non défini.

## Correction de l'exercice 4 – Matrice identité

— $AI$ : coefficient $(1\,;1)$ : $5\times 1 + (-2)\times 0 = 5$ ; $(1\,;2)$ : $5\times 0 + (-2)\times 1 = -2$ ; et de même pour la seconde ligne.

$$AI = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

— Le calcul de $IA$ donne également $A$.

— Propriété du cours : $I$ est l'**élément neutre** du produit matriciel, exactement comme 1 pour les nombres. C'est l'un des rares cas où le produit **commute**.

**Réponse.** $AI = IA = A$.

## Correction de l'exercice 5 – Puissances d'une matrice

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ : $(1\,;1) = 1$ ; $(1\,;2) = 1\times 1 + 1\times 1 = 2$ ; $(2\,;1) = 0$ ; $(2\,;2) = 1$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Justification par récurrence : si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La propriété se propage.

**Réponse.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ · b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 6 – Déterminant et inversibilité

Critère du cours : une matrice $2 \times 2$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

— a) $\det A = 3 \times 4 - 1 \times 2 = 12 - 2 = 10 \neq 0$ : $A$ est **inversible**.
— b) $\det B = 2 \times 3 - 6 \times 1 = 6 - 6 = 0$ : $B$ n'est **pas** inversible.
— Interprétation de b) : la seconde ligne est proportionnelle à la première (rapport $\frac{1}{2}$), les deux lignes portent la même information.

**Réponse.** a) oui (det = 10) · b) non (det = 0).

## Correction de l'exercice 7 – Calculer une inverse

Formule du cours : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, avec $\det A = 10$.

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

**Vérification** : $AA^{-1}$, coefficient $(1\,;1)$ : $3 \times 0{,}4 + 1 \times (-0{,}2) = 1{,}2 - 0{,}2 = 1$.

— Coefficient $(1\,;2)$ : $3 \times (-0{,}1) + 1 \times 0{,}3 = 0$.
— Coefficient $(2\,;1)$ : $2 \times 0{,}4 + 4 \times (-0{,}2) = 0{,}8 - 0{,}8 = 0$.
— Coefficient $(2\,;2)$ : $2 \times (-0{,}1) + 4 \times 0{,}3 = -0{,}2 + 1{,}2 = 1$.
— On obtient bien $I$ : le calcul est validé. **Cette vérification doit être systématique.**

**Réponse.** $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 8 – Écrire un système sous forme matricielle

On range les coefficients des inconnues dans $A$, les inconnues dans $X$, les seconds membres dans $B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

— Contrôle : le produit $AX$ vaut $\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x - y \end{pmatrix}$, ce qui redonne bien le système.
— $\det A = 2 \times (-1) - 3 \times 5 = -17 \neq 0$ : le système admet une **unique** solution.

**Réponse.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 9 – Résoudre par l'inverse

— $\det A = -17$, donc

$$A^{-1} = \frac{1}{-17}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Puis $X = A^{-1}B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1\times 8 + 3\times 3 \\ 5\times 8 - 2\times 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— Donc $x = 1$ et $y = 2$.

— Vérification dans le système : $2 + 6 = 8$ et $5 - 2 = 3$. Correct.

**Réponse.** $x = 1$ et $y = 2$.

## Correction de l'exercice 10 – Système sans solution unique

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, donc $\det A = 6 - 6 = 0$.

b) $A$ n'est pas inversible : la méthode $X = A^{-1}B$ **ne s'applique pas**, et le système n'a pas de solution unique.

— Examinons-le directement : la première équation divisée par 2 donne $x + 3y = 2{,}5$, alors que la seconde impose $x + 3y = 1$.

— Les deux conditions sont **incompatibles** : le système n'a **aucune** solution.

— Géométriquement, les deux droites sont strictement parallèles.

**Réponse.** a) $\det A = 0$ · b) aucune solution (droites parallèles).

## Correction de l'exercice 11 – Matrice non inversible et produit nul

a) Première ligne : $1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$.

— Seconde ligne : $2 \times 2 + 4 \times (-1) = 0$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) On a $AX = 0$ avec $X \neq 0$ : cela prouve que $A$ n'est **pas inversible**.

— En effet, si $A^{-1}$ existait, on aurait $X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0$, ce qui contredit $X \neq 0$.

— Contrôle par le déterminant : $\det A = 4 - 4 = 0$. Cohérent.

— **Différence avec les nombres** : un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune des deux soit nulle.

**Réponse.** a) $AX = 0$ · b) $A$ n'est pas inversible (et $\det A = 0$).

## Correction de l'exercice 12 – Problème : matrice de production

a) Première ligne : $3 \times 20 + 2 \times 30 = 60 + 60 = 120$.

— Seconde ligne : $1 \times 20 + 4 \times 30 = 20 + 120 = 140$.

— $AX = \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \end{pmatrix}$ : il faut 120 kg de la première matière et 140 kg de la seconde.

b) On résout $AX = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$, soit $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

— $\det A = 12 - 2 = 10$, donc $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

— $X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4\times 200 - 2\times 150 \\ -200 + 3\times 150 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 500 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix}$.

— L'entreprise peut fabriquer 50 unités du premier produit et 25 du second.

— Vérification : $3 \times 50 + 2 \times 25 = 200$ et $50 + 4 \times 25 = 150$. Correct.

**Réponse.** a) $\begin{pmatrix} 120 \\ 140 \end{pmatrix}$ kg · b) 50 et 25 unités.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l’exercice 13 – Puissances d’une matrice par récurrence

a) On calcule ligne par colonne :

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2A = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$$

b) On conjecture $A^n = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$. **Initialisation** : pour $n = 1$, c’est $A$. **Hérédité** : si $A^n = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$ pour un entier $n \geq 1$, alors

$$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1+n\\0 & 1\end{pmatrix}$$

ce qui est la formule au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$. **Contrôle** : pour $n = 3$, on retrouve le calcul du a).

**Réponse.** a) $A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$. · b) $A^n = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$.

## Correction de l’exercice 14 – Trouver des coefficients inconnus

On calcule le produit : chaque coefficient est le produit d’une ligne de la première matrice par une colonne de la seconde.

$$\begin{pmatrix}x & 2\\1 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2 & 2\\1+y & y\end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales quand tous leurs coefficients sont égaux : $x + 2 = 5$, $2 = 2$, $1 + y = 3$ et $y = 2$. On obtient $x = 3$, et les deux dernières équations donnent toutes deux $y = 2$ : elles sont compatibles. **Contrôle** : $\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}$.

**Réponse.** $x = 3$ et $y = 2$.

## Correction de l’exercice 15 – Synthèse : puissances et récurrence

a) Pour une matrice **diagonale**, le produit se fait coefficient par coefficient sur la diagonale.

— $A^2 = \begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 9\end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix}8 & 0\\0 & 27\end{pmatrix}$.

b) On conjecture $A^n = \begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}$.

— Vérification par récurrence : $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix}2^n \times 2 & 0\\0 & 3^n \times 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^{n+1} & 0\\0 & 3^{n+1}\end{pmatrix}$. La propriété se propage.

c) $\det A = 2 \times 3 - 0 = 6 \neq 0$ : $A$ est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

— Cohérent avec la conjecture, qui donne $A^{-1} = A^{-1}$ en prenant $n = -1$ : les coefficients diagonaux sont les inverses.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).