

Plaquette 1 - Somme, produit, puissances et matrice inverse

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Une matrice $n \times p$ a n lignes et p colonnes. L'**addition** se fait terme à terme (mêmes dimensions requises).
- **Multiplication par un réel** : chaque coefficient est multiplié.
- **Produit** AB : défini si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B . Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$\sum_k a_{ik} b_{kj}$$

- Le produit matriciel n'est **pas commutatif** : en général $AB \neq BA$.

- **Matrice identité** : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $AI = IA = A$.

- **Déterminant** d'une matrice 2×2 : pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = ad - bc$.

- A est **inversible** si et seulement si $\det A \neq 0$, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- **Système linéaire** : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ s'écrit $AX = B$, et si A est inversible, $X = A^{-1}B$.

- **Puissances** : $A^n = A \times A \times \dots \times A$ (n facteurs), avec $A^0 = I$.

Correction de l'exercice 1 - Somme et multiple

Les opérations se font **terme à terme**.

$$- A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$- A - B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$- 3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } 2B = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Réponse. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}.$

Correction de l'exercice 2 - Produit de deux matrices

On calcule chaque coefficient comme une **somme de produits** ligne par colonne.

- AB : coefficient $(1; 1)$: $2 \times 1 + (-1) \times (-2) = 4$; $(1; 2)$: $2 \times 5 + (-1) \times 0 = 10$; $(2; 1)$: $3 \times 1 + 4 \times (-2) = -5$; $(2; 2)$: $3 \times 5 + 0 = 15$.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

- $BA : (1; 1) : 1 \times 2 + 5 \times 3 = 17 ; (1; 2) : 1 \times (-1) + 5 \times 4 = 19 ; (2; 1) : -2 \times 2 + 0 = -4 ; (2; 2) : -2 \times (-1) + 0 = 2.$

$$BA = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Constat** : $AB \neq BA$. Le produit matriciel n'est pas commutatif — c'est la différence majeure avec le calcul sur les nombres.

Réponse. $AB = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$: non commutatif.

Correction de l'exercice 3 - Produit de dimensions différentes

a) M est de dimension 2×3 et N de dimension 3×1 .

- Le nombre de colonnes de M (3) égale le nombre de lignes de N (3) : le produit est **défini**, de dimension 2×1 .

b) Première ligne : $1 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times (-3) = 4$.

- Seconde ligne : $3 \times 2 + (-1) \times 1 + 4 \times (-3) = 6 - 1 - 12 = -7$.

$$MN = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

c) N est 3×1 et M est 2×3 : il faudrait que $1 = 2$. Le produit NM n'est **pas défini**.

Réponse. a) oui, 2×1 · b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ · c) non défini.

Correction de l'exercice 4 - Matrice identité

- AI : coefficient $(1; 1) : 5 \times 1 + (-2) \times 0 = 5 ; (1; 2) : 5 \times 0 + (-2) \times 1 = -2 ;$ et de même pour la seconde ligne.

$$AI = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

- Le calcul de IA donne également A .

- Propriété du cours : I est l'**élément neutre** du produit matriciel, exactement comme 1 pour les nombres. C'est l'un des rares cas où le produit **commute**.

Réponse. $AI = IA = A$.

Correction de l'exercice 5 - Puissances d'une matrice

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (1; 1) = 1 ; (1; 2) = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2 ; (2; 1) = 0 ; (2; 2) = 1.$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b) On conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

— Justification par récurrence : si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La propriété se propage.

Réponse. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 - Déterminant et inversibilité

Critère du cours : une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

- a) $\det A = 3 \times 4 - 1 \times 2 = 12 - 2 = 10 \neq 0$: A est **inversible**.
- b) $\det B = 2 \times 3 - 6 \times 1 = 6 - 6 = 0$: B n'est **pas** inversible.
- Interprétation de b) : la seconde ligne est proportionnelle à la première (rapport $\frac{1}{2}$), les deux lignes portent la même information.

Réponse. a) oui ($\det = 10$) · b) non ($\det = 0$).

Correction de l'exercice 7 - Calculer une inverse

Formule du cours : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, avec $\det A = 10$.

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Vérification : AA^{-1} , coefficient $(1; 1)$: $3 \times 0,4 + 1 \times (-0,2) = 1,2 - 0,2 = 1$.

- Coefficient $(1; 2)$: $3 \times (-0,1) + 1 \times 0,3 = 0$.
- Coefficient $(2; 1)$: $2 \times 0,4 + 4 \times (-0,2) = 0,8 - 0,8 = 0$.
- Coefficient $(2; 2)$: $2 \times (-0,1) + 4 \times 0,3 = -0,2 + 1,2 = 1$.
- On obtient bien I : le calcul est validé. **Cette vérification doit être systématique.**

Réponse. $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 - Écrire un système sous forme matricielle

On range les coefficients des inconnues dans A , les inconnues dans X , les seconds membres dans B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Contrôle : le produit AX vaut $\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x - y \end{pmatrix}$, ce qui redonne bien le système.
- $\det A = 2 \times (-1) - 3 \times 5 = -17 \neq 0$: le système admet une **unique** solution.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 9 - Résoudre par l'inverse

— $\det A = -17$, donc

$$A^{-1} = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

- Puis $X = A^{-1}B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 \times 8 + 3 \times 3 \\ 5 \times 8 - 2 \times 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Donc $x = 1$ et $y = 2$.
- Vérification dans le système : $2 + 6 = 8$ et $5 - 2 = 3$. Correct.

Réponse. $x = 1$ et $y = 2$.

Correction de l'exercice 10 - Système sans solution unique

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, donc $\det A = 6 - 6 = 0$.

b) A n'est pas inversible : la méthode $X = A^{-1}B$ **ne s'applique pas**, et le système n'a pas de solution unique.

- Examinons-le directement : la première équation divisée par 2 donne $x + 3y = 2,5$, alors que la seconde impose $x + 3y = 1$.
- Les deux conditions sont **incompatibles** : le système n'a **aucune** solution.
- Géométriquement, les deux droites sont strictement parallèles.

Réponse. a) $\det A = 0$ · b) aucune solution (droites parallèles).

Correction de l'exercice 11 - Matrice non inversible et produit nul

- a) Première ligne : $1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$.
 — Seconde ligne : $2 \times 2 + 4 \times (-1) = 0$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) On a $AX = 0$ avec $X \neq 0$: cela prouve que A n'est **pas inversible**.

- En effet, si A^{-1} existait, on aurait $X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0$, ce qui contredit $X \neq 0$.
- Contrôle par le déterminant : $\det A = 4 - 4 = 0$. Cohérent.
- **Différence avec les nombres** : un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune des deux soit nulle.

Réponse. a) $AX = 0$ · b) A n'est pas inversible (et $\det A = 0$).

Correction de l'exercice 12 - Problème : matrice de production

- a) Première ligne : $3 \times 20 + 2 \times 30 = 60 + 60 = 120$.
 — Seconde ligne : $1 \times 20 + 4 \times 30 = 20 + 120 = 140$.
 — $AX = \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \end{pmatrix}$: il faut 120 kg de la première matière et 140 kg de la seconde.

b) On résout $AX = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$, soit $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

— $\det A = 12 - 2 = 10$, donc $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

— $X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 \times 200 - 2 \times 150 \\ -200 + 3 \times 150 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix}$.

- L'entreprise peut fabriquer 50 unités du premier produit et 25 du second.
- Vérification : $3 \times 50 + 2 \times 25 = 200$ et $50 + 4 \times 25 = 150$. Correct.

Réponse. a) $\begin{pmatrix} 120 \\ 140 \end{pmatrix}$ kg · b) 50 et 25 unités.

Correction de l'exercice 13 - Synthèse : puissances et récurrence

a) Pour une matrice **diagonale**, le produit se fait coefficient par coefficient sur la diagonale.

$$- A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

b) On conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

— Vérification par récurrence : $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n \times 2 & 0 \\ 0 & 3^n \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$. La propriété se propage.

c) $\det A = 2 \times 3 - 0 = 6 \neq 0$: A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

— Cohérent avec la conjecture, qui donne $A^{-1} = A^{-1}$ en prenant $n = -1$: les coefficients diagonaux sont les inverses.

Réponse. a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ · b) $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ · c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.