Plaquette 5 – Synthèse : problèmes et modèles matriciels

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Boîte à outils du chapitre.

— **Traduire un tableau** : les **lignes** sont les individus (ateliers, villes, classes d'âge), les **colonnes** les caractéristiques (produits, destinations). Le produit QC n'a de sens que si les colonnes de Q et les lignes de C désignent la **même chose**.

— **Système linéaire** : $AX = B$, résolu par $X = A^{-1}B$ lorsque $\det A \neq 0$, sinon par combinaisons de lignes.

— **Matrices de transformations du plan** : la rotation d'angle θ autour de O a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Composer deux transformations revient à **multiplier** leurs matrices.

— **Suites couplées** : $X_{n+1} = AX_n$ donne $X_n = A^n X_0$. Astuce fréquente : étudier la **somme** et la **différence** des deux suites, qui sont souvent géométriques.

$$X_{n+1} = AX_n \quad \Longrightarrow \quad X_n = A^n X_0$$

— **Matrice de population** : les coefficients sont des taux (survie, natalité). Une colonne de somme 1 signifie que l'effectif total se conserve.

— **Contrôle final** : un effectif négatif, une probabilité supérieure à 1 ou un total qui dérive signalent une erreur de modélisation.

Correction de l'exercice 1 – Coût de production

On place les prix dans une **colonne** pour que le produit ait un sens :

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

— Q est de format 2×3, C de format 3×1 : le produit QC existe et donne une colonne à deux lignes, une par atelier.

$$QC = \begin{pmatrix} 20 \times 4 + 15 \times 6 + 30 \times 2,5 \\ 12 \times 4 + 25 \times 6 + 18 \times 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 + 90 + 75 \\ 48 + 150 + 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 \\ 243 \end{pmatrix}$$

Conclusion. Le lot du premier atelier coûte 245 €, celui du second 243 €.

— **Contrôle d'ordre de grandeur** : les deux ateliers consomment 65 kg et 55 kg de matière, pour des coûts voisins — le second utilise davantage la matière la plus chère, ce qui compense ✓.

— **Le produit dans l'autre sens, CQ, n'existe pas** : 3×1 contre 2×3, les dimensions ne se correspondent pas.

Réponse. 245 € et 243 €.

Correction de l'exercice 2 – Retrouver des prix unitaires

On note x, y, z les prix unitaires. Le problème s'écrit $MX = B$ avec

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Résolution par combinaisons de lignes.

— $L_1 - L_3$: $-x + 2y = 7$.
— $2L_2 - L_1$: $(2-2)x + (4-3)y + (4-1)z = 34 - 23$, soit $y + 3z = 11$.
— $3L_2 - L_3$: $(3-3)x + (6-1)y + (6-1)z = 51 - 16$, soit $5y + 5z = 35$, donc $y + z = 7$.
— En soustrayant : $(y + 3z) - (y + z) = 11 - 7$, donc $2z = 4$ et $z = 2$.
— Puis $y = 7 - 2 = 5$, et $-x + 10 = 7$ donne $x = 3$.

Vérification dans les trois achats.

— $2 \times 3 + 3 \times 5 + 2 = 6 + 15 + 2 = 23$ € ✓.
— $3 + 10 + 4 = 17$ € ✓ · $9 + 5 + 2 = 16$ € ✓.
— **Conclusion** : A coûte 3 €, B coûte 5 € et C coûte 2 €.

Réponse. A:3 €, B:5 €, C:2 €.

Correction de l’exercice 3 – Une parabole par trois points

Chaque point fournit une équation : on écrit le système sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Résolution.

— $L_2 - L_1$: $3a + b = 3$.
— $L_3 - L_2$: $5a + b = 7$.
— Par différence : $2a = 4$, donc $a = 2$, puis $b = 3 - 6 = -3$.
— L_1 donne $c = 0 - a - b = -2 + 3 = 1$.

Conclusion. La parabole a pour équation $y = 2x^2 - 3x + 1$.

— **Vérification aux trois points** : $x = 1$ donne $2 - 3 + 1 = 0$ ✓ ; $x = 2$ donne $8 - 6 + 1 = 3$ ✓ ; $x = 3$ donne $18 - 9 + 1 = 10$ ✓.
— **À retenir** : trois points d’abscisses distinctes déterminent **une unique** parabole, ce qui se traduit par l’inversibilité de la matrice du système.

Réponse. $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Correction de l’exercice 4 – Composer deux transformations

a) La symétrie par rapport à $y = x$ échange les coordonnées : $(x\,;y) \mapsto (y\,;x)$, d’où

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $SR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

— Cette matrice transforme $(x\,;y)$ en $(x\,;-y)$: c’est la **symétrie par rapport à l’axe des abscisses**.

$RS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Celle-ci transforme $(x\,;y)$ en $(-x\,;y)$: c'est la **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées**.
— $SR \neq RS$: géométriquement, tourner puis retourner ne donne pas le même résultat que retourner puis tourner. La non-commutativité du produit matriciel se **voit** ici.

Réponse. a) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ · b) SR : symétrie d'axe (Ox) ; RS : symétrie d'axe (Oy).

Correction de l'exercice 5 – Image d'un triangle

a) On multiplie la matrice par la colonne des coordonnées :

— $M' : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $M'(4\,;3)$.
— $N' : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, donc $N'(2\,;9)$.
— O est envoyé sur lui-même : la transformation fixe l'origine.

b) L'aire d'un triangle OMN vaut $\frac{1}{2}|x_M y_N - x_N y_M|$.

— Triangle initial : $\frac{1}{2}|2 \times 3 - 1 \times 1| = \frac{5}{2} = 2,5$.
— Triangle image : $\frac{1}{2}|4 \times 9 - 2 \times 3| = \frac{30}{2} = 15$.
— Le rapport des aires vaut $\frac{15}{2,5} = 6$, c'est-à-dire **exactement** $\det A = 2 \times 3 = 6$.
— **Le résultat général** : une transformation linéaire multiplie toutes les aires par $|\det A|$. Un déterminant nul écraserait le plan sur une droite — l'aire deviendrait nulle, et la transformation ne serait plus inversible.

Réponse. a) $M'(4\,;3)$ et $N'(2\,;9)$ · b) l'aire est multipliée par $6 = \det A$.

Correction de l'exercice 6 – Suites couplées, résolution complète

a) On additionne, puis on soustrait les deux relations.

— $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 4u_n + 4v_n = 4s_n$: (s_n) est géométrique de raison 4, avec $s_0 = 2$.
— $d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = 2u_n - 2v_n = 2d_n$: (d_n) est géométrique de raison 2, avec $d_0 = 2$.

b) Donc $s_n = 2 \times 4^n$ et $d_n = 2 \times 2^n$.

— On résout le petit système : $u_n = \dfrac{s_n + d_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{s_n - d_n}{2}$.

$$u_n = 4^n + 2^n \qquad v_n = 4^n - 2^n$$

— **Vérification au rang** 1 : $u_1 = 4 + 2 = 6$ et $v_1 = 4 - 2 = 2$; le système direct donne $u_1 = 3 \times 2 + 0 = 6$ ✓ et $v_1 = 2 + 0 = 2$ ✓.
— **Calcul demandé** : $u_3 = 64 + 8 = 72$ et $v_3 = 64 - 8 = 56$.
— **Contrôle matriciel** : $A^3 = \begin{pmatrix} 36 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$ et $A^3 X_0 = \begin{pmatrix} 72 \\ 56 \end{pmatrix}$ ✓.

Réponse. a) raisons 4 et 2 · b) $u_n = 4^n + 2^n$, $v_n = 4^n - 2^n$; $u_3 = 72$, $v_3 = 56$.

Correction de l'exercice 7 – Une population à deux classes d'âge

a) On écrit chaque effectif de l'année suivante en fonction de ceux de l'année en cours.

— Jeunes : ils proviennent uniquement de la reproduction des adultes, donc $j_{n+1} = 3a_n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Adultes : les jeunes qui survivent plus les adultes qui survivent, donc $a_{n+1} = 0,4\,j_n + 0,5\,a_n$.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \end{pmatrix}$$

b) $X_1 = LX_0 = \begin{pmatrix} 0 \times 100 + 3 \times 60 \\ 0,4 \times 100 + 0,5 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 70 \end{pmatrix}$.

— $X_2 = LX_1 = \begin{pmatrix} 3 \times 70 \\ 0,4 \times 180 + 0,5 \times 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 72 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 107 \end{pmatrix}$.

— **Conclusion** : après un an, 180 jeunes et 70 adultes ; après deux ans, 210 jeunes et 107 adultes.

— **Différence avec un modèle de répartition** : ici les colonnes n'ont pas pour somme 1, et c'est normal — la population **croît**, elle n'est pas simplement redistribuée.

Réponse. a) $L = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$ · b) (180 ; 70) puis (210 ; 107).

Correction de l'exercice 8 – Composer trois alliages

Mise en équations.

— Masse totale : $x + y + z = 100$.

— Cuivre : $0,6x + 0,3y + 0,1z = 41$, soit (en multipliant par 10) $6x + 3y + z = 410$.

— Zinc : $0,2x + 0,5y + 0,3z = 31$, soit $2x + 5y + 3z = 310$.

Résolution.

— $L_2 - L_1$ (après avoir écrit L_1 sous la forme $x + y + z = 100$) : $5x + 2y = 310$.

— $L_3 - 3L_1$: $2x + 5y + 3z - 3x - 3y - 3z = 310 - 300$, soit $-x + 2y = 10$.

— On soustrait : $(5x + 2y) - (-x + 2y) = 310 - 10$, donc $6x = 300$ et $x = 50$.

— Puis $-50 + 2y = 10$ donne $y = 30$, et $z = 100 - 50 - 30 = 20$.

Vérification.

— Cuivre : $0,6 \times 50 + 0,3 \times 30 + 0,1 \times 20 = 30 + 9 + 2 = 41$ kg ✓.

— Zinc : $0,2 \times 50 + 0,5 \times 30 + 0,3 \times 20 = 10 + 15 + 6 = 31$ kg ✓.

— **Conclusion** : 50 kg de A, 30 kg de B et 20 kg de C.

Réponse. $x = 50$ kg, $y = 30$ kg, $z = 20$ kg.

Correction de l'exercice 9 – Deux matrices qui commutent

a) On développe en n'utilisant que l'associativité, puis l'hypothèse une seule fois :

— $(AB)^2 = ABAB = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2$.

b) Notons $P(n)$: « $(AB)^n = A^nB^n$ ».

— **Initialisation** : $n = 1$ est immédiat.

— **Hérédité** : supposons $P(n)$. Alors $(AB)^{n+1} = (AB)^n(AB) = A^nB^nAB$.

— Il reste à faire passer A à gauche de B^n : comme $AB = BA$, une récurrence immédiate donne $B^nA = AB^n$.

— Donc $(AB)^{n+1} = A^n\left(AB^n\right)B = A^{n+1}B^{n+1}$ ✓.

c) Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

— $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $A^2 = A$ et $B^2 = B$, donc $A^2B^2 = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: ici les deux coïncident par hasard.

— Prenons plutôt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, tandis que $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: **différents** ✓.

Réponse. a) $ABAB = A(AB)B$ · b) récurrence avec $B^nA = AB^n$ · c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 10 – Un système mal posé

a) En notant x et y les prix des petits et grands bouquets :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 46 \\ 6x + 4y = 92 \end{cases} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

— $\det M = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$: la matrice n’est pas inversible.

b) **Non**, on ne peut pas déterminer les prix.

— La deuxième équation est exactement le double de la première : le second client n’apporte **aucune information nouvelle**.

— Le système se réduit à $3x + 2y = 46$, dont les solutions forment une droite : par exemple $(10\,;8)$, $(12\,;5)$, $(8\,;11)$ conviennent toutes.

— **Ce qu’il faudrait** : un achat dont les proportions ne soient **pas** proportionnelles aux précédentes, par exemple 2 petits et 5 grands. Le déterminant deviendrait $3 \times 5 - 2 \times 2 = 11 \neq 0$, et la solution serait unique.

— **La leçon** : un déterminant nul est le signe qu’une des équations est redondante — en pratique, qu’une mesure a été faite deux fois pour rien.

Réponse. a) $\det M = 0$ · b) non : une infinité de couples conviennent, il faut un achat non proportionnel.

Correction de l’exercice 11 – Répartition dans trois entrepôts

On note x, y, z les nombres de colis de E_1, E_2, E_3.

Mise en équations.

— $x + y + z = 900$;

— $x = 2y$, soit $x - 2y = 0$;

— $z = y + 100$, soit $-y + z = 100$.

Résolution par substitution (plus rapide ici que l’inverse) :

— On remplace x et z dans la première équation : $2y + y + (y + 100) = 900$.

— $4y + 100 = 900$, donc $4y = 800$ et $y = 200$.

— $x = 2 \times 200 = 400$ et $z = 200 + 100 = 300$.

Vérification.

— $400 + 200 + 300 = 900$ ✓ · $400 = 2 \times 200$ ✓ · $300 = 200 + 100$ ✓.

— **Conclusion** : 400 colis en E_1, 200 en E_2 et 300 en E_3.

— **Sous forme matricielle**, le système s’écrit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 900 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$, et la matrice est inversible, ce qui garantit l’unicité.

Réponse. E_1:400, E_2:200, E_3:300 colis.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Une transformation et son inverse

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de déterminant $3 \times 2 - 5 \times 1 = 1 \neq 0$: la transformation est inversible (c'est une bijection du plan).

b) L'inverse se lit avec la formule :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} x = 2x' - 5y' \\ y = -x' + 3y' \end{cases}$$

c) On applique la transformation réciproque à $(11\,;4)$:

— $x = 2 \times 11 - 5 \times 4 = 22 - 20 = 2$.
— $y = -11 + 3 \times 4 = 1$.
— **Vérification** : l'image de $(2\,;1)$ est $(3 \times 2 + 5 \times 1\,;2 + 2) = (11\,;4)$ ✓.
— **Conclusion** : le point cherché est $(2\,;1)$.

Réponse. a) $\det A = 1$ · b) $x = 2x' - 5y'$, $y = -x' + 3y'$ · c) le point $(2\,;1)$.

Correction de l'exercice 13 – Un placement en trois parts

On note x, y, z les trois parts (en euros), placées respectivement à 2 %, 3 % et 5 %.

Mise en équations.

— Total : $x + y + z = 20\,000$.
— Intérêts : $0,02x + 0,03y + 0,05z = 570$.
— Troisième condition : $z = \dfrac{x}{3}$, c'est-à-dire $x = 3z$.

Résolution par substitution.

— On remplace x par $3z$ dans la première équation : $3z + y + z = 20\,000$, donc $y = 20\,000 - 4z$.
— On reporte dans l'équation des intérêts :

$$0,02 \times 3z + 0,03(20\,000 - 4z) + 0,05z = 570$$

— $0,06z + 600 - 0,12z + 0,05z = 570$, soit $600 - 0,01z = 570$.
— $0,01z = 30$, donc $z = 3\,000$.
— Alors $x = 3 \times 3\,000 = 9\,000$ et $y = 20\,000 - 12\,000 = 8\,000$.

Vérification.

— Total : $9\,000 + 8\,000 + 3\,000 = 20\,000$ € ✓.
— Intérêts : $180 + 240 + 150 = 570$ € ✓ · et $3\,000 = \dfrac{9\,000}{3}$ ✓.
— **Conclusion** : 9 000 € à 2 %, 8 000 € à 3 % et 3 000 € à 5 %.
— **Remarque** : le calcul montre que les intérêts valent $600 - 0,01z$. Avec cette contrainte, ils ne peuvent **jamais** dépasser 600 € — une information utile avant même de résoudre.

Réponse. 9 000 € à 2 %, 8 000 € à 3 %, 3 000 € à 5 %.

Correction de l'exercice 14 – Évolution d'un abonnement

a) On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$: abonnés et non-abonnés au mois n.

— $a_{n+1} = 0,85\,a_n + 0,10\,b_n$; $b_{n+1} = 0,15\,a_n + 0,90\,b_n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$T = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 8\,000 \end{pmatrix}$$

b) $X_1 = \begin{pmatrix} 0,85 \times 2\,000 + 0,1 \times 8\,000 \\ 0,15 \times 2\,000 + 0,9 \times 8\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,700 + 800 \\ 300 + 7\,200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,500 \\ 7\,500 \end{pmatrix}$.

— $X_2 = \begin{pmatrix} 2\,125 + 750 \\ 375 + 6\,750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,875 \\ 7\,125 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : les totaux valent toujours $10\,000$ ✓.

c) L'état stable $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie $TX = X$ avec $a + b = 10\,000$.

— La première ligne donne $0,85a + 0,1b = a$, soit $0,1b = 0,15a$, donc $b = 1,5a$.

— Avec $a + 1,5a = 10\,000 : 2,5a = 10\,000$, donc $a = 4\,000$ et $b = 6\,000$.

— **Vérification** : $0,85 \times 4\,000 + 0,1 \times 6\,000 = 3\,400 + 600 = 4\,000$ ✓.

— **Conclusion** : le nombre d'abonnés tend vers $4\,000$, soit $40\,\%$ de la population.

Réponse. a) $T = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{pmatrix}$ · b) 2 500 puis 2 875 abonnés · c) 4 000 abonnés.

Correction de l'exercice 15 – Bilan : un problème complet

a) On note x et y les nombres de meubles M_1 et M_2 produits.

— Bois : $3x + 4y = 480$; Travail : $5x + 2y = 520$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 480 \\ 520 \end{pmatrix}$$

b) $\det A = 3 \times 2 - 4 \times 5 = 6 - 20 = -14 \neq 0$: la solution est unique.

— $A^{-1} = \dfrac{1}{-14}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

— $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -960 + 2\,080 \\ 2\,400 - 1\,560 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1\,120 \\ 840 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}$.

— **Vérification** : $3 \times 80 + 4 \times 60 = 240 + 240 = 480$ m² ✓ et
$5 \times 80 + 2 \times 60 = 400 + 120 = 520$ h ✓.

— **Conclusion** : 80 meubles M_1 et 60 meubles M_2.

c) On multiplie la ligne des prix par la colonne des quantités :

$$\begin{pmatrix} 200 & 150 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} = 200 \times 80 + 150 \times 60 = 16\,000 + 9\,000 = 25\,000$$

— La recette hebdomadaire est de $25\,000$ **€**.

Réponse. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ · b) 80 et 60 meubles · c) 25 000 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).