

Plaquette 2 - Calcul matriciel : somme, produit et pièges

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Les automatismes du calcul matriciel : additionner, multiplier par un réel, **multiplier deux matrices** en respectant les dimensions, et surtout repérer ce qui **ne marche pas** comme dans $\mathbb{R}$ — le produit n'est pas commutatif, un produit peut être nul sans qu'aucun facteur le soit, et $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 1 - Somme, différence et multiple

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$, $A - B$ et $3A$.

Exercice 2 - Produit de deux matrices carrées

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calculer AB et BA .

Que constate-t-on ?

Exercice 3 - Des formats différents

On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- Quels produits peut-on former ? Donner leurs formats.
- Calculer CD .

Exercice 4 - Un produit nul

On pose $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer EF .
- Quelle règle du calcul dans $\mathbb{R}$ se trouve mise en défaut ?

Exercice 5 - Une identité remarquable qui tombe

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$:

- Calculer $(A + B)^2$.
- Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et comparer.
- Quelle est la formule correcte ?

Exercice 6 - Matrices diagonales

On pose $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer T^2 et T^3 .
- b) Conjecturer T^n et le démontrer par récurrence.

Exercice 7 - Une matrice nilpotente

On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer N^2 et N^3 .
- b) En déduire $(I_2 + N)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8 - Combinaison linéaire de matrices

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer deux réels a et b tels que $aA + bB = C$.

Exercice 9 - Produit matrice-colonne

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- a) Calculer AX .
- b) Traduire l'équation $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ par un système, puis le résoudre.

Exercice 10 - Une matrice idempotente

On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer P^2 .
- b) En déduire P^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 11 - Une équation matricielle

On pose $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier que $H^2 = 5H + 2I_2$.
- b) En déduire une expression de H^{-1} en fonction de H et I_2 .

Exercice 12 - Matrice de stock et de prix

Un artisan possède trois ateliers. Le tableau des stocks (en unités) de deux produits est

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 8 & 9 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

(les lignes sont les ateliers, les colonnes les produits P_1 et P_2).

Les prix unitaires sont 40 € pour P_1 et 75 € pour P_2 .

Calculer, à l'aide d'un produit matriciel, la valeur du stock de chaque atelier.

Exercice 13 - Deux matrices qui commutent

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer AB et BA .
- En déduire $(AB)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 14 - Le carré d'une somme, cas favorable

Soit A une matrice carrée et I la matrice identité de même format.

- Montrer que $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$.
- Développer $(A + I)^3$.

Exercice 15 - Bilan : calculer et conclure

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2A - I_2$.
- En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
- Démontrer par récurrence que $A^n = nA - (n-1)I_2$ pour tout $n \geq 1$, puis calculer A^{10} .