

Plaquette 3 - Matrice inverse et résolution de systèmes

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On teste l'inversibilité par le **déterminant**, on calcule l'inverse d'une matrice 2×2 par la formule, on écrit un système linéaire sous la forme $AX = B$ et on le résout d'un coup par $X = A^{-1}B$ — y compris pour plusieurs seconds membres, et jusqu'au **chiffrement de Hill**, où l'inverse sert de clé de déchiffrement.

Exercice 1 - Déterminant et inversibilité

Ces matrices sont-elles inversibles ?

a) $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $K = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $L = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 - Calculer une inverse

Déterminer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis vérifier le résultat.

Exercice 3 - Un système par l'inverse

Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$$

en utilisant l'écriture matricielle.

Exercice 4 - Quand le déterminant est nul

On considère les systèmes

$$(S_1): \begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

a) Que vaut le déterminant de la matrice associée ?

b) Résoudre chacun des deux systèmes.

Exercice 5 - Un paramètre dans la matrice

Soit m un réel et $A_m = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 3 & m-1 \end{pmatrix}$.

a) Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

b) Calculer A_m^{-1} pour $m = 4$.

Exercice 6 - Deux seconds membres

On pose $L = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer L^{-1} .

b) Résoudre $LX = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis $LX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 - L'inverse d'un produit

Soit A et B deux matrices carrées inversibles de même format.

a) Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 - Résoudre une équation matricielle

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation matricielle $AX + B = C$, d'inconnue la matrice X .

Exercice 9 - Un système 3×3

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 4y + 9z = 36 \end{cases}$$

Exercice 10 - Un mélange à composer

Un laboratoire mélange deux solutions. La solution A contient 20 g de sel par litre, la solution B en contient 50 g par litre.

On veut obtenir 12 litres d'un mélange contenant 30 g de sel par litre.

Écrire le problème sous forme matricielle et le résoudre.

Exercice 11 - Chiffrer avec une matrice

Les lettres sont codées $A = 0, \dots, Z = 25$. On groupe le message par blocs de deux lettres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on chiffre par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{26}$$

Chiffrer le mot MATH.

Exercice 12 - Déchiffrer avec l'inverse

On garde la matrice de chiffrement $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ modulo 26.

- Calculer $\det A$ et vérifier qu'il est inversible modulo 26.
- Montrer que $A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \pmod{26}$, puis déchiffrer KYAV.

Exercice 13 - Trois produits, trois contraintes

Une entreprise fabrique trois articles A, B, C . Chaque jour, elle en produit x, y et z unités.

- le nombre total d'articles est 200 ;
- l'article A est produit en même quantité que B et C réunis ;
- la recette journalière est de 1 740 €, aux prix unitaires 10 €, 8 € et 5 €.

Déterminer x, y et z .

Exercice 14 - Une matrice et son carré

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 4A + I_2 = 0$.
- En déduire A^{-1} sans utiliser la formule du cours, puis vérifier avec la formule.

Exercice 15 - Bilan : inverses et systèmes

a) Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre $\begin{cases} 2x + 7y = 11 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$ par l'inverse.

c) Pour quelle valeur de m le système $\begin{cases} mx + 4y = 1 \\ x + my = 3 \end{cases}$ n'a-t-il pas une unique solution ?