

Plaquelette 4 – Puissances de matrices : conjecture, récurrence et décomposition

Matrices : opérations et inverse – Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Quatre techniques pour calculer A^n sans faire n produits : **conjecturer puis démontrer par récurrence**, décomposer $A = \lambda I + N$ avec N **nilpotente** et appliquer le binôme, utiliser une relation du type $A^2 = aA + bI$, ou passer par une **décomposition** $A = PDP^{-1}$ qui rend les puissances immédiates.

Exercice 1 – Conjecturer puis démontrer

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer A^2 et A^3 .
- b) Conjecturer l'expression de A^n et la démontrer par récurrence.

Exercice 2 – Décomposer en identité plus nilpotente

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Écrire $A = 2I_2 + N$ et calculer N^2 .
- b) En déduire A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3 – Une matrice périodique

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer J^2, J^3 et J^4 .
- b) En déduire J^{2026} .

Exercice 4 – Une matrice d'ordre 3

On pose $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer R^2 et R^3 .
- b) En déduire R^{100} et R^{-1} .

Exercice 5 – Puissances par une relation de degré 2

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier que $B^2 = 3B - 2I_2$.

b) On admet que $B^n = a_n B + b_n I_2$. Montrer que $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$, puis calculer B^5 .

Exercice 6 - Une décomposition PDP⁻¹

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$.

- Calculer P^{-1} puis A .
- Justifier que $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculer A^4 .

Exercice 7 - La matrice de Fibonacci

On pose $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on note (u_n) la suite de Fibonacci : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

- Calculer F^2 , F^3 et F^4 .
- Conjecturer F^n en fonction des termes de la suite, et vérifier pour $n = 5$.

Exercice 8 - Une nilpotente d'ordre 3

On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer N^2 et N^3 .
- En déduire $(I_3 + N)^n$ pour $n \geq 2$.

Exercice 9 - Les racines carrées de l'identité

- Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = I_2$.
- En déduire A^{2026} et A^{-1} .

Exercice 10 - Somme de puissances

On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I_2 + N$.

Calculer $S = I_2 + A + A^2 + \dots + A^n$.

Exercice 11 - Suites couplées

Deux suites vérifient $u_0 = 3$, $v_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

- Écrire cette relation sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, puis exprimer X_n en fonction de A et X_0 .
- Calculer u_2 et v_2 .

Exercice 12 - Deux villes

Chaque année, 10 % des habitants de la ville A partent vers la ville B , et 20 % de ceux de B vont vers A . Au départ, A compte 600 habitants et B en compte 400.

- Écrire la matrice T de l'évolution et le vecteur X_0 .
- Calculer les populations après un an, puis après deux ans.

Exercice 13 - Une conjecture sur les coefficients

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et A^3 .
- Conjecturer $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ c_n & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer c_n , puis démontrer.

Exercice 14 - Quand le binôme est interdit

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer AB et BA : commutent-elles ?
- Comparer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 15 - Bilan : trois calculs de puissances

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n .
- Soit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer D^n et préciser le comportement de ses coefficients quand n tend vers $+\infty$.
- Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer M^{2026} et M^{2027} .