

**Plaquette 1 - Somme, produit, puissances et matrice inverse****Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes**

## Exercices

**Méthode**

On additionne et on multiplie des matrices (en surveillant la non-commutativité), on calcule des puissances, on inverse une matrice  $2 \times 2$  par le déterminant, puis on résout un système linéaire sous forme matricielle.

**Exercice 1 - Somme et multiple**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A + B$ ,  $A - B$  et  $3A - 2B$ .

**Exercice 2 - Produit de deux matrices**

Avec les mêmes  $A$  et  $B$ , calculer  $AB$  puis  $BA$ . Que constate-t-on ?

**Exercice 3 - Produit de dimensions différentes**

Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

- a) Le produit  $MN$  est-il défini ? Quelle est sa dimension ?
- b) Le calculer.
- c) Le produit  $NM$  est-il défini ?

**Exercice 4 - Matrice identité**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $AI$  et  $IA$ .

**Exercice 5 - Puissances d'une matrice**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
- b) Conjecturer  $A^n$ .

**Exercice 6 - Déterminant et inversibilité**

Ces matrices sont-elles inversibles ?

- a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7 - Calculer une inverse**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^{-1}$ , puis vérifier que  $AA^{-1} = I$ .

**Exercice 8 - Écrire un système sous forme matricielle**

Écrire le système suivant sous la forme  $AX = B$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

**Exercice 9 - Résoudre par l'inverse**

Résoudre le système précédent en utilisant  $X = A^{-1}B$ .

**Exercice 10 - Système sans solution unique**

On considère le système  $\begin{cases} 2x + 6y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ .

- a) Calculer le déterminant de la matrice associée.
- b) Que peut-on en conclure ? Le système a-t-il des solutions ?

**Exercice 11 - Matrice non inversible et produit nul**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- a) Calculer  $AX$ .
- b) Que montre ce calcul sur  $A$  ?

**Exercice 12 - Problème : matrice de production**

Une entreprise fabrique deux produits. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  donne, en ligne, la quantité de matière (en kg) nécessaire par produit ; la colonne  $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$  donne le nombre d'unités produites.

- a) Calculer  $AX$  et interpréter.
- b) L'entreprise disposait de  $\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$  kg : combien d'unités de chaque produit peut-elle fabriquer au maximum ?

**Exercice 13 - Synthèse : puissances et récurrence**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
- b) Conjecturer  $A^n$  et vérifier la conjecture.
- c)  $A$  est-elle inversible ? Donner  $A^{-1}$ .