Plaquette 1 – Somme, produit, puissances et matrice inverse

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

On additionne et on multiplie des matrices (en surveillant la non-commutativité), on calcule des puissances, on inverse une matrice 2×2 par le déterminant, puis on résout un système linéaire sous forme matricielle.

Exercice 1 – Somme et multiple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$, $A - B$ et $3A - 2B$.

Exercice 2 – Produit de deux matrices

Avec les mêmes A et B, calculer AB puis BA. Que constate-t-on ?

Exercice 3 – Produit de dimensions différentes

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Le produit MN est-il défini ? Quelle est sa dimension ?

b) Le calculer.

c) Le produit NM est-il défini ?

Exercice 4 – Matrice identité

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer AI et IA.

Exercice 5 – Puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et A^3.

b) Conjecturer A^n.

Exercice 6 – Déterminant et inversibilité

Ces matrices sont-elles inversibles ?

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7 – Calculer une inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}, puis vérifier que $AA^{-1} = I$.

Exercice 8 – Écrire un système sous forme matricielle

Écrire le système suivant sous la forme $AX = B$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

Exercice 9 – Résoudre par l'inverse

Résoudre le système précédent en utilisant $X = A^{-1}B$.

Exercice 10 – Système sans solution unique

On considère le système $\begin{cases} 2x + 6y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$.

a) Calculer le déterminant de la matrice associée.

b) Que peut-on en conclure ? Le système a-t-il des solutions ?

Exercice 11 – Matrice non inversible et produit nul

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AX.

b) Que montre ce calcul sur A ?

Exercice 12 – Problème : matrice de production

Une entreprise fabrique deux produits. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ donne, en ligne, la quantité de matière (en kg) nécessaire par produit ; la colonne $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ donne le nombre d'unités produites.

a) Calculer AX et interpréter.

b) L'entreprise disposait de $\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$ kg : combien d'unités de chaque produit peut-elle fabriquer au maximum ?

Exercice 13 – Puissances d'une matrice par récurrence

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer A^2 et A^3.
b) Conjecturer l'expression de A^n pour $n \geq 1$, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 14 – Trouver des coefficients inconnus

Déterminer les réels x et y tels que

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 – Synthèse : puissances et récurrence

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et A^3.
b) Conjecturer A^n et vérifier la conjecture.
c) A est-elle inversible ? Donner A^{-1}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).