Plaquette 5 – Synthèse : problèmes et modèles matriciels

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

Exercices

Méthode

Les matrices au travail : **coûts et productions**, **systèmes** issus d'un problème concret, **transformations du plan**, **suites couplées** et modèles d'évolution de population. À chaque fois, la même démarche : traduire l'énoncé en matrices, calculer, puis **revenir au contexte** en donnant une réponse avec ses unités.

Exercice 1 – Coût de production

Deux ateliers fabriquent chacun un lot composé de trois matières premières. Les quantités (en kg) sont

$$Q = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 12 & 25 & 18 \end{pmatrix}$$

(lignes : ateliers ; colonnes : matières M_1, M_2, M_3).

Les prix au kilo sont 4 €, 6 € et 2,50 €.

Calculer le coût du lot de chaque atelier.

Exercice 2 – Retrouver des prix unitaires

Trois clients achètent des articles A, B et C :

— le premier prend 2 A, 3 B et 1 C pour 23 € ;
— le deuxième prend 1 A, 2 B et 2 C pour 17 € ;
— le troisième prend 3 A, 1 B et 1 C pour 16 €.

Déterminer le prix unitaire de chaque article.

Exercice 3 – Une parabole par trois points

Déterminer la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points $A(1\,;0)$, $B(2\,;3)$ et $C(3\,;10)$.

Exercice 4 – Composer deux transformations

Dans un repère orthonormé, on note S la matrice de la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, et R celle de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Écrire S et R.

b) Calculer SR et RS, et reconnaître les transformations obtenues.

Exercice 5 – Image d'un triangle

On applique la transformation de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ au triangle OMN avec $O(0\,;0)$, $M(2\,;1)$ et $N(1\,;3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Déterminer les images M' et N'.

b) Comparer l'aire du triangle image à celle du triangle initial.

Exercice 6 – Suites couplées, résolution complète

Soit $u_0 = 2$, $v_0 = 0$ et, pour tout n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$$

a) Montrer que $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$ sont géométriques.

b) En déduire u_n et v_n, puis calculer u_3 et v_3.

Exercice 7 – Une population à deux classes d'âge

Une population d'oiseaux est décrite par le nombre de jeunes j_n et d'adultes a_n l'année n :

— chaque adulte produit en moyenne 3 jeunes par an ;
— 40 % des jeunes deviennent adultes l'année suivante ;
— 50 % des adultes survivent d'une année sur l'autre.

Au départ : 100 jeunes et 60 adultes.

a) Écrire la matrice L du modèle.

b) Calculer les effectifs après un an, puis après deux ans.

Exercice 8 – Composer trois alliages

Trois alliages contiennent du cuivre et du zinc dans les proportions suivantes :

Alliage	Cuivre	Zinc
A	60 %	20 %
B	30 %	50 %
C	10 %	30 %

On veut fabriquer 100 kg d'un mélange contenant 41 kg de cuivre et 31 kg de zinc.

Déterminer les masses x, y, z de chaque alliage.

Exercice 9 – Deux matrices qui commutent

Soit A et B deux matrices carrées qui **commutent** ($AB = BA$).

a) Montrer que $(AB)^2 = A^2B^2$.

b) Montrer par récurrence que $(AB)^n = A^nB^n$ pour tout $n \geq 1$.

c) Donner un contre-exemple lorsque A et B ne commutent pas.

Exercice 10 – Un système mal posé

Un fleuriste vend des bouquets de deux tailles. Un client achète 3 petits et 2 grands pour 46 €, un autre 6 petits et 4 grands pour 92 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Écrire le système et calculer le déterminant.

b) Peut-on déterminer les prix ? Que faudrait-il de plus ?

Exercice 11 – Répartition dans trois entrepôts

Une entreprise répartit 900 colis dans trois entrepôts E_1, E_2, E_3.

— E_1 reçoit deux fois plus de colis que E_2 ;
— E_3 reçoit 100 colis de plus que E_2.

Déterminer la répartition.

Exercice 12 – Une transformation et son inverse

Une transformation du plan envoie $(x\,;y)$ sur $(x'\,;y')$ avec

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

a) Écrire la matrice A de cette transformation et justifier qu'elle est inversible.

b) Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

c) Quel point a pour image $(11\,;4)$?

Exercice 13 – Un placement en trois parts

Une somme de 20 000 € est partagée en trois placements aux taux annuels 2 %, 3 % et 5 %.

Les intérêts de la première année s'élèvent à 570 €, et la part placée à 5 % est le tiers de la part placée à 2 %.

Déterminer les trois parts.

Exercice 14 – Évolution d'un abonnement

Chaque mois, 85 % des abonnés d'un service le restent, et 10 % des non-abonnés s'abonnent. La population totale est de 10 000 personnes, dont 2 000 abonnés au départ.

a) Écrire la matrice d'évolution T et X_0.

b) Calculer X_1 et X_2.

c) Déterminer l'état stable.

Exercice 15 – Bilan : un problème complet

Une usine fabrique deux modèles de meubles M_1 et M_2. Chaque meuble demande du bois et des heures de travail :

Modèle	Bois (m²)	Travail (h)
M_1	3	5
M_2	4	2

L'usine dispose chaque semaine de 480 m² de bois et de 520 heures de travail, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

souhaite tout utiliser.

a) Écrire le système sous forme matricielle $AX = B$.

b) Justifier que la solution est unique et la déterminer.

c) Le prix de vente est de 200 € pour M_1 et 150 € pour M_2. Calculer la recette hebdomadaire par un produit matriciel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).