

Plaque 3 - Calcul algébrique : identités, puissances de i et inverses

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes Corrections détaillées

Boîte à outils

Identités remarquables dans $\mathbb{C}$. Elles sont valables telles quelles, car $\mathbb{C}$ est un corps commutatif :

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \quad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \quad (z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$$

Avec $z = a + ib$ (a, b réels), la troisième donne l'identité la plus utile du chapitre :

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |a + ib|^2$$

Puissances de i . La suite (i^n) est périodique de période 4 :

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$$

Pour calculer i^n , on écrit $n = 4q + r$ avec $0 \leq r \leq 3$: alors $i^n = i^r$. La même règle vaut pour les exposants négatifs, en ajoutant un multiple de 4 à l'exposant.

Inverse et quotient. Pour $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z'}}{|z'|^2}$$

En pratique : **multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.**

Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

$$|zz'| = |z||z'| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n$$

C'est le moyen de contrôle le plus rapide : on calcule le module des deux membres, ils doivent coïncider.

Somme géométrique. Pour $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Elle s'applique à $q = i$ comme à n'importe quel complexe.

Correction de l'exercice 1 - Développer et réduire

- **Premier produit** : on développe comme dans $\mathbb{R}$, puis on remplace i^2 par -1 ✓
- **Développement** : $(2 + i)(3 - 5i) = 6 - 10i + 3i - 5i^2$ ✓
- **On remplace** : $-5i^2 = +5$ ✓
- **Réduction** : $6 + 5 - 7i$ ✓
- **Résultat** :

$$(2 + i)(3 - 5i) = 11 - 7i$$

- **Contrôle par les modules** : $|2 + i| = \sqrt{5}$ et $|3 - 5i| = \sqrt{34}$ ✓
- **Produit attendu** : $\sqrt{5} \times \sqrt{34} = \sqrt{170}$ ✓

- **Module obtenu** : $\sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$ ✓
- **Deuxième calcul** : on passe par le carré, plus sûr que le cube direct ✓
- **Carré** : $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ ✓
- **Cube** : $(1 + i)^3 = (1 + i)^2 \times (1 + i) = 2i(1 + i) = 2i + 2i^2$ ✓
- **Résultat** :

$$(1 + i)^3 = -2 + 2i$$

- **Contrôle** : $|(1 + i)^3| = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \approx 2,828$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ ✓
- **Troisième calcul** : identité remarquable $(a - b)^2$ ✓
- **Développement** : $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2$ ✓
- **On remplace** : $9i^2 = -9$ ✓
- **Résultat** :

$$(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$$

- **Contrôle** : $|2 - 3i|^2 = 13$, et $\sqrt{25 + 144} = 13$ ✓

Réponse. $11 - 7i$, $-2 + 2i$ et $-5 - 12i$.

Correction de l'exercice 2 - Produit d'un complexe par son conjugué

- **Identité utilisée** : c'est $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $b = i \times$ quelque chose ✓
- **Premier produit** : $(4 + i)(4 - i) = 16 - i^2$ ✓
- **On remplace** : $-i^2 = +1$ ✓
- **Résultat** :

$$(4 + i)(4 - i) = 17$$

- **Second produit** : $(5 - 2i)(5 + 2i) = 25 - (2i)^2$ ✓
- **Calcul** : $(2i)^2 = 4i^2 = -4$ ✓
- **Résultat** :

$$(5 - 2i)(5 + 2i) = 29$$

- **Lien avec le module** : pour tout z , $z\bar{z} = |z|^2$ ✓
- **Donc** : $|4 + i|^2 = 17$ ✓
- **Module** :

$$|4 + i| = \sqrt{17} \approx 4,123$$

- **De même** : $|5 - 2i|^2 = 29$ ✓
- **Module** :

$$|5 - 2i| = \sqrt{29} \approx 5,385$$

- **Observation** : le produit $z\bar{z}$ est **toujours un réel positif** ✓
- **Justification** : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ ✓
- **Piège** : $(4 + i)(4 + i)$ ne vaut **pas** 17, mais $15 + 8i$ ✓
- **Retenir** : c'est bien le **conjugué** qui fait disparaître la partie imaginaire ✓

Réponse. $(4 + i)(4 - i) = 17$ et $(5 - 2i)(5 + 2i) = 29$, donc $|4 + i| = \sqrt{17}$ et $|5 - 2i| = \sqrt{29}$.

Correction de l'exercice 3 - Inverses

— **Formule du cours :**

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

— **Premier inverse :** $\overline{2+i} = 2-i$ et $|2+i|^2 = 4+1 = 5$ ✓

— **Résultat :**

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

— **Contrôle :** $(0,4 - 0,2i)(2+i) = 0,8 + 0,4i - 0,4i + 0,2 = 1$ ✓

— **Deuxième inverse :** $\bar{i} = -i$ et $|i|^2 = 1$ ✓

— **Résultat :**

$$\frac{1}{i} = -i$$

— **Contrôle :** $-i \times i = -i^2 = 1$ ✓

— **À retenir :** l'inverse de i est son opposé, pas lui-même ✓

— **Troisième inverse :** $\overline{1-i} = 1+i$ et $|1-i|^2 = 1+1 = 2$ ✓

— **Résultat :**

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

— **Contrôle :** $\frac{(1+i)(1-i)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ ✓

— **Contrôle par les modules :** $\left| \frac{1}{1-i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ ✓

— **Vérification :** $\sqrt{0,25 + 0,25} = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ ✓

— **Règle générale :** un complexe de module 1 a pour inverse son conjugué ✓

Réponse. $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, $-i$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Correction de l'exercice 4 - Quotients

— **Méthode unique :** multiplier haut et bas par le conjugué du dénominateur ✓

— **Premier quotient :** on multiplie par $2+i$ ✓

— **Dénominateur :** $(2-i)(2+i) = 4+1 = 5$ ✓

— **Numérateur :** $(3+i)(2+i) = 6+3i+2i+i^2 = 5+5i$ ✓

— **Résultat :**

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

— **Contrôle :** $(1+i)(2-i) = 2-i+2i+1 = 3+i$ ✓

— **Deuxième quotient :** on multiplie par $1+i$ ✓

— **Dénominateur :** $(1-i)(1+i) = 2$ ✓

— **Numérateur :** $(1+i)^2 = 2i$ ✓

— **Résultat :**

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i$$

— **Contrôle :** $i(1-i) = i+1 = 1+i$ ✓

— **Troisième quotient :** on multiplie par $3-4i$ ✓

- **Dénominateur** : $9 + 16 = 25$ ✓
- **Numérateur** : $2i(3 - 4i) = 6i - 8i^2 = 8 + 6i$ ✓
- **Résultat** :

$$\frac{2i}{3 + 4i} = \frac{8 + 6i}{25} = \frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$$

- **Contrôle par les modules** : $\frac{|2i|}{|3 + 4i|} = \frac{2}{5} = 0,4$ ✓
 - **Vérification** : $\sqrt{0,32^2 + 0,24^2} = \sqrt{0,1024 + 0,0576} = \sqrt{0,16} = 0,4$ ✓
- Réponse.** $1 + i$, i et $\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$.

Correction de l'exercice 5 - Puissances de i à exposant élevé

- **Outil** : $i^4 = 1$, donc i^n ne dépend que du reste de n dans la division par 4 ✓
- **Division euclidienne** : $2027 = 4 \times 506 + 3$ ✓
- **Donc** : $i^{2027} = (i^4)^{506} \times i^3 = i^3$ ✓
- **Résultat** :

$$i^{2027} = -i$$

- **Exposant négatif** : on ajoute un multiple de 4 pour se ramener à un exposant positif ✓
- **Calcul** : $-13 + 16 = 3$ ✓
- **Donc** : $i^{-13} = i^3$ ✓
- **Résultat** :

$$i^{-13} = -i$$

- **Contrôle** : $i^{-13} \times i^{13} = i^0 = 1$, et $i^{13} = i^1 = i$ ✓
- **Vérification** : $-i \times i = 1$ ✓
- **La somme** : elle compte 2027 termes, de i^0 à i^{2026} ✓
- **Regroupement** : quatre termes consécutifs donnent $1 + i - 1 - i = 0$ ✓
- **Nombre de blocs complets** : $2027 = 4 \times 506 + 3$, donc 506 blocs et 3 termes restants ✓
- **Les trois termes restants** : $i^{2024} + i^{2025} + i^{2026}$, soit $1 + i - 1$ ✓
- **Résultat** :

$$1 + i + i^2 + \dots + i^{2026} = i$$

- **Contrôle par la somme géométrique** : $\frac{1 - i^{2027}}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i}$ ✓
- **Or** : $\frac{1 + i}{1 - i} = i$, calculé à l'exercice 4 ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes donnent le même résultat ✓

Réponse. $i^{2027} = -i$, $i^{-13} = -i$ et la somme vaut i .

Correction de l'exercice 6 - Les puissances de $1 + i$

- **Le carré** : $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2$ ✓
- **Simplification** : $1 - 1 + 2i$ ✓
- **Résultat clé de tout l'exercice** :

$$(1 + i)^2 = 2i$$

— **La puissance 4** : $(1 + i)^4 = \left[(1 + i)^2\right]^2 = (2i)^2 \checkmark$

— **Calcul** : $4i^2 = -4 \checkmark$

— **Résultat** :

$$(1 + i)^4 = -4$$

— **La puissance 8** : $(1 + i)^8 = \left[(1 + i)^4\right]^2 = (-4)^2 \checkmark$

— **Résultat** :

$$(1 + i)^8 = 16$$

— **Contrôle** : $|1 + i| = \sqrt{2}$, donc $|(1 + i)^8| = (\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16 \checkmark$

— **La grande puissance** : 2026 est pair, on passe par le carré $\checkmark$

— **Écriture** : $(1 + i)^{2026} = \left[(1 + i)^2\right]^{1013} = (2i)^{1013} \checkmark$

— **Séparation** : $(2i)^{1013} = 2^{1013} \times i^{1013} \checkmark$

— **Reste modulo 4** : $1013 = 4 \times 253 + 1$, donc $i^{1013} = i \checkmark$

— **Résultat** :

$$(1 + i)^{2026} = 2^{1013} i$$

— **Contrôle du module** : $|(1 + i)^{2026}| = (\sqrt{2})^{2026} = 2^{1013} \checkmark$

— **Cohérence** : le résultat est imaginaire pur, de module $2^{1013} \checkmark$

— **Piège à éviter** : écrire 2^{1013} comme une valeur décimale n'a aucun intérêt, on laisse la puissance $\checkmark$

Réponse. $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^4 = -4$, $(1 + i)^8 = 16$ et $(1 + i)^{2026} = 2^{1013} i$.

Correction de l'exercice 7 - Conjuguer un quotient de deux façons

— **Forme algébrique** : on multiplie par $1 - 3i \checkmark$

— **Dénominateur** : $(1 + 3i)(1 - 3i) = 1 + 9 = 10 \checkmark$

— **Numérateur** : $(2 - i)(1 - 3i) = 2 - 6i - i + 3i^2 \checkmark$

— **Simplification** : $2 - 3 - 7i = -1 - 7i \checkmark$

— **Résultat** :

$$z = \frac{-1 - 7i}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$$

— **Première façon de conjuguer** : on change le signe de la partie imaginaire $\checkmark$

— **Résultat** :

$$\bar{z} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

— **Seconde façon** : la conjugaison est compatible avec le quotient $\checkmark$

— **Formule du cours** :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

— **Application** : $\bar{z} = \frac{\overline{2 - i}}{\overline{1 + 3i}} = \frac{2 + i}{1 - 3i} \checkmark$

— **Forme algébrique** : on multiplie par $1 + 3i \checkmark$

— **Numérateur** : $(2 + i)(1 + 3i) = 2 + 6i + i - 3 = -1 + 7i \checkmark$

- **Résultat** : $\frac{-1 + 7i}{10}$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes donnent bien le même complexe ✓
- **Contrôle du module** : $|z| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{0,01 + 0,49} = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ ✓
- **À retenir** : la seconde méthode évite tout calcul quand on n'a besoin que de $\bar{z}$ sous forme de quotient ✓

Réponse. $z = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ et $\bar{z} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

Correction de l'exercice 8 - Modules d'expressions composées

- **Module de z** : $|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$ ✓

- **Résultat** :

$$|z| = 5$$

- **Module de z'** : $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ ✓

- **Formule du produit** :

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

- **Application** : $5 \times \sqrt{2}$ ✓

- **Résultat** :

$$|zz'| = 5\sqrt{2} \approx 7,071$$

- **Formule du quotient** :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

- **Application** : $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ✓

- **On rationalise** : $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ✓

- **Résultat** :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,536$$

- **Formule de la puissance** : $|z^n| = |z|^n$ ✓

- **Application** : 5^5 ✓

- **Résultat** :

$$|z^5| = 3\,125$$

- **Contrôle** : $zz' = (3 - 4i)(1 + i) = 3 + 3i - 4i + 4 = 7 - i$ ✓

- **Vérification** : $\sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ✓

- **Intérêt de la méthode** : calculer z^5 sous forme algébrique demanderait cinq produits, le module en demande zéro ✓

Réponse. $|z| = 5$, $|zz'| = 5\sqrt{2}$, $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et $|z^5| = 3\,125$.

Correction de l'exercice 9 - Réel ou imaginaire pur selon un paramètre

- **Première étape obligatoire** : mettre z_m sous forme algébrique ✓
- **On multiplie par le conjugué $1 + i$** ✓

- **Dénominateur** : $(1 - i)(1 + i) = 2$ ✓
- **Numérateur** : $(m + i)(1 + i) = m + mi + i + i^2$ ✓
- **Simplification** : $m - 1 + (m + 1)i$ ✓
- **Forme algébrique** :

$$z_m = \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2}i$$

- **Repérage** : $\operatorname{Re}(z_m) = \frac{m-1}{2}$ et $\operatorname{Im}(z_m) = \frac{m+1}{2}$ ✓
- **Condition « réel »** : la partie imaginaire est nulle ✓
- **Équation** : $\frac{m+1}{2} = 0$, donc $m = -1$ ✓
- **Valeur obtenue** : $z_{-1} = \frac{-2}{2} = -1$ ✓
- **Condition « imaginaire pur »** : la partie réelle est nulle **et** le nombre n'est pas nul ✓
- **Équation** : $\frac{m-1}{2} = 0$, donc $m = 1$ ✓
- **Valeur obtenue** : $z_1 = \frac{2}{2}i = i$ ✓
- **Vérification que** $z_1 \neq 0$: $i \neq 0$, la condition est remplie ✓
- **Contrôle direct** : $\frac{-1+i}{1-i} = \frac{-(1-i)}{1-i} = -1$ ✓
- **Contrôle direct** : $\frac{1+i}{1-i} = i$, déjà obtenu à l'exercice 4 ✓
- **Piège** : z_m n'est jamais nul, car $m - 1$ et $m + 1$ ne s'annulent pas ensemble ✓

Réponse. z_m est réel pour $m = -1$ (et vaut -1) et imaginaire pur pour $m = 1$ (et vaut i).

Correction de l'exercice 10 - Équation où le conjugué apparaît

- **Méthode imposée** : z et $\bar{z}$ ne sont pas indépendants, on pose $z = x + iy$ avec x et y réels ✓
- **Conjugué** : $\bar{z} = x - iy$ ✓
- **Membre de gauche** : $3(x + iy) - 2(x - iy)$ ✓
- **Développement** : $3x + 3iy - 2x + 2iy$ ✓
- **Réduction** : $x + 5iy$ ✓
- **Identification des parties réelles** : $x = 5$ ✓
- **Identification des parties imaginaires** : $5y = 15$ ✓
- **Donc** : $y = 3$ ✓
- **Solution** :

$$z = 5 + 3i$$

- **Vérification** : $\bar{z} = 5 - 3i$ ✓
- **Calcul** : $3(5 + 3i) - 2(5 - 3i) = 15 + 9i - 10 + 6i$ ✓
- **Résultat** : $5 + 15i$ ✓
- **Cohérence** : l'équation est satisfaite, la solution est unique ✓
- **Pourquoi l'identification est licite** : deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles **et** imaginaires sont égales ✓
- **Piège classique** : écrire $z = \frac{5+15i}{3-2}$ revient à traiter $\bar{z}$ comme z , ce qui est faux ✓
- **Contre-exemple** : $z + \bar{z} = i$ n'a **aucune** solution, car $z + \bar{z} = 2x$ est toujours réel ✓

Réponse. $z = 5 + 3i$.

Correction de l'exercice 11 - Second degré à coefficients réels

- **Formule du cours** : pour $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients **réels** et $\Delta < 0$, les deux solutions sont

$$z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- **Repérage** : $a = 1, b = -6, c = 13$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13$ ✓
- **Calcul** : $36 - 52 = -16$ ✓
- **Signe** : $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes conjuguées ✓
- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{16} = 4$ ✓
- **Première solution** : $\frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$ ✓
- **Seconde solution** : $\frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$$
- **Vérification** : $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$ ✓
- **Calcul complet** : $5 + 12i - 6(3 + 2i) + 13 = 5 + 12i - 18 - 12i + 13 = 0$ ✓
- **Contrôle par la somme** : $z_1 + z_2 = 6$, et $-\frac{b}{a} = 6$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $(3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$, et $\frac{c}{a} = 13$ ✓
- **À retenir** : à coefficients réels, les solutions non réelles vont **toujours par paires conjuguées** ✓

Réponse. $S = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$.

Correction de l'exercice 12 - Second degré avec a différent de 1

- **Repérage** : $a = 2, b = 2, c = 5$ ✓
- **Discriminant** : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 5$ ✓
- **Calcul** : $4 - 40 = -36$ ✓
- **Signe** : $\Delta < 0$, deux solutions conjuguées ✓
- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{36} = 6$ ✓
- **Formule** :

$$z = \frac{-2 \pm 6i}{2 \times 2} = \frac{-2 \pm 6i}{4}$$

- **Simplification** : on divise par 2 ✓
- **Solutions** :

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

- **Erreur à ne pas commettre** : oublier le $2a$ au dénominateur ✓
- **Contrôle par la somme** : $z_1 + z_2 = -1$, et $-\frac{b}{a} = -1$ ✓
- **Contrôle par le produit** : $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}$ ✓
- **Comparaison** : $\frac{c}{a} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$ ✓
- **Vérification directe** : $z_2^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}i - \frac{9}{4} = -2 - \frac{3}{2}i$ ✓

— **Calcul complet** : $2\left(-2 - \frac{3}{2}i\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) + 5 = -4 - 3i - 1 + 3i + 5 = 0 \checkmark$

— **Cohérence** : l'équation est satisfaite $\checkmark$

Réponse. $S = \left\langle -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right\rangle$.

Correction de l'exercice 13 - Somme et produit des racines

— **Relations coefficients-racines** : pour $az^2 + bz + c = 0$,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

— **Repérage** : $a = 1, b = -4, c = 29 \checkmark$

— **Somme** : $z_1 + z_2 = 4 \checkmark$

— **Produit** : $z_1 z_2 = 29 \checkmark$

— **Identité à utiliser** : $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 \checkmark$

— **Application** : $4^2 - 2 \times 29 \checkmark$

— **Calcul** : $16 - 58 \checkmark$

— **Résultat** :

$$z_1^2 + z_2^2 = -42$$

— **Vérification par la résolution** : $\Delta = 16 - 116 = -100 \checkmark$

— **Racine de l'opposé** : $\sqrt{100} = 10 \checkmark$

— **Solutions** : $\frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i \checkmark$

— **Carré de la première** : $(2 + 5i)^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i \checkmark$

— **Carré de la seconde** : $(2 - 5i)^2 = -21 - 20i \checkmark$

— **Somme des carrés** : $-21 - 21 = -42 \checkmark$

— **Cohérence** : les deux méthodes coïncident $\checkmark$

— **Observation** : z_1^2 et z_2^2 sont encore conjugués, donc leur somme est réelle $\checkmark$

— **Contrôle du produit** : $(2 + 5i)(2 - 5i) = 4 + 25 = 29 \checkmark$

Réponse. $z_1 + z_2 = 4, z_1 z_2 = 29$ et $z_1^2 + z_2^2 = -42$; les racines sont $2 + 5i$ et $2 - 5i$.

Correction de l'exercice 14 - Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}$

— **a) Discriminant** : $\Delta = 4 - 40 = -36 \checkmark$

— **Racine de l'opposé** : $\sqrt{36} = 6 \checkmark$

— **Racines** : $\frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i \checkmark$

— **Forme factorisée du cours** : $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$ avec $a = 1 \checkmark$

— **Factorisation** :

$$P(z) = (z + 1 - 3i)(z + 1 + 3i)$$

— **Vérification** : le produit vaut $(z + 1)^2 - (3i)^2 \checkmark$

— **Développement** : $z^2 + 2z + 1 + 9 = z^2 + 2z + 10 \checkmark$

— **Cohérence** : on retrouve bien $P \checkmark$

— **b) Pourquoi pas directement** : Q est de **degré** 4, la formule du second degré ne s'y applique pas $\checkmark$

— **Changement d'inconnue** : on pose $Z = z^2$, l'équation $Q(z) = 0$ devient $Z^2 + 2Z + 10 = 0 \checkmark$

— **C'est exactement l'équation du a)** : $Z = -1 + 3i$ ou $Z = -1 - 3i \checkmark$

- **Traduction** : $z^2 = -1 + 3i$ ou $z^2 = -1 - 3i$ ✓
- **Ce qui reste à faire** : extraire les racines carrées complexes, ce qui relève du chapitre suivant ✓
- **Factorisation partielle obtenue** :

$$Q(z) = (z^2 + 1 - 3i)(z^2 + 1 + 3i)$$

- **Vérification** : le produit vaut $(z^2 + 1)^2 + 9 = z^4 + 2z^2 + 1 + 9$ ✓
- **Cohérence** : on retrouve $z^4 + 2z^2 + 10$ ✓
- **À retenir** : un changement d'inconnue ramène une équation bicarrée à un second degré, mais il faut ensuite **remonter** à z ✓

Réponse. $P(z) = (z + 1 - 3i)(z + 1 + 3i)$ et $Q(z) = (z^2 + 1 - 3i)(z^2 + 1 + 3i)$.

Correction de l'exercice 15 - Impédance d'un circuit RLC

- **a) Partie imaginaire** : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 55 - 15$ ✓
- **Calcul** : 40 ✓
- **Forme algébrique** :

$$Z = 30 + 40i$$

- **Module** : $|Z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600}$ ✓
- **Calcul** : $\sqrt{2500}$ ✓
- **Résultat** :

$$|Z| = 50 \Omega$$

- **Remarque** : on reconnaît le triangle (30 ; 40 ; 50), proportionnel à (3 ; 4 ; 5) ✓
- **b) Loi d'Ohm** : $I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{30 + 40i}$ ✓
- **On multiplie par le conjugué** $30 - 40i$ ✓
- **Dénominateur** : $|Z|^2 = 2500$ ✓
- **Numérateur** : $230(30 - 40i) = 6900 - 9200i$ ✓
- **Forme algébrique** :

$$I = \frac{6900 - 9200i}{2500} = 2,76 - 3,68i$$

- **Intensité efficace** : $|I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{230}{50}$ ✓
- **Résultat** :

$$|I| = 4,60 \text{ A}$$

- **Contrôle par la forme algébrique** : $\sqrt{2,76^2 + 3,68^2} = \sqrt{7,6176 + 13,5424} = \sqrt{21,16}$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{21,16} = 4,6$ ✓
- **Interprétation** : la partie imaginaire de I est négative, l'intensité est en **retard** sur la tension — le circuit est inductif ✓
- **c) Condition** : Z est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle ✓
- **Équation** : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, c'est-à-dire

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

- **Nom de ce phénomène** : c'est la **résonance** du circuit ✓

- **Conséquence** : alors $Z = R = 30 \, \Omega$, l'impédance est minimale et l'intensité maximale ✓
- **Application numérique** : on aurait $|I| = \frac{230}{30} \approx 7,67 \, \text{A}$ ✓

Réponse. a) $Z = 30 + 40i$ et $|Z| = 50 \, \Omega$ · b) $I = 2,76 - 3,68i$ et $|I| = 4,60 \, \text{A}$ · c) lorsque $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ (résonance), et alors $Z = R$.