Plaquette 3 – Calcul algébrique : identités, puissances de i et inverses

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Identités remarquables dans $\mathbb{C}$. Elles sont valables telles quelles, car $\mathbb{C}$ est un corps commutatif :

$$(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \qquad (z-z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \qquad (z+z')(z-z') = z^2 - z'^2$$

Avec $z = a + ib$ (a, b réels), la troisième donne l'identité la plus utile du chapitre :

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |a+ib|^2$$

Puissances de i. La suite $\left(i^n\right)$ est périodique de période 4 :

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

Pour calculer i^n, on écrit $n = 4q + r$ avec $0 \leq r \leq 3$: alors $i^n = i^r$. La même règle vaut pour les exposants négatifs, en ajoutant un multiple de 4 à l'exposant.

Inverse et quotient. Pour $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$$

En pratique : **multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur**.

Module d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

$$|zz'| = |z|\,|z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad |z^n| = |z|^n$$

C'est le moyen de contrôle le plus rapide : on calcule le module des deux membres, ils doivent coïncider.

Somme géométrique. Pour $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Elle s'applique à $q = i$ comme à n'importe quel complexe.

Correction de l'exercice 1 – Développer et réduire

On développe comme dans $\mathbb{R}$, puis on remplace i^2 par -1 :

$$(2+i)(3-5i) = 6 - 10i + 3i - 5i^2 = 6 + 5 - 7i = 11 - 7i$$

Pour le cube, on passe par le carré : $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, puis $(1+i)^3 = 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$. Enfin $(2-3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i$. **Contrôle** par les modules : $|2+i| \times |3-5i| = \sqrt{5} \times \sqrt{34} = \sqrt{170}$, et $|11 - 7i| = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$.

Réponse. $11 - 7i$, $-2 + 2i$ et $-5 - 12i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Produit d'un complexe par son conjugué

On reconnaît l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, avec $b = i$ puis $b = 2i$:

$$(4+i)(4-i) = 16 - i^2 = 17 \qquad (5-2i)(5+2i) = 25 - (2i)^2 = 25 + 4 = 29$$

Pour tout complexe z, on a $z\overline{z} = |z|^2$: $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$. Donc $|4+i|^2 = 17$ et $|5-2i|^2 = 29$, d'où $|4+i| = \sqrt{17}$ et $|5-2i| = \sqrt{29}$. Attention : c'est le produit par le **conjugué** qui donne un réel ; $(4+i)^2 = 15 + 8i$ ne l'est pas.

Réponse. $(4+i)(4-i) = 17$ et $(5-2i)(5+2i) = 29$, donc $|4+i| = \sqrt{17}$ et $|5-2i| = \sqrt{29}$.

Correction de l'exercice 3 – Inverses

Comme $z\overline{z} = |z|^2$, l'inverse d'un complexe non nul s'écrit

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Donc $\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2-i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$, $\dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{1} = -i$ et $\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. **Contrôle** : $(0{,}4 - 0{,}2i)(2+i) = 0{,}8 + 0{,}4i - 0{,}4i + 0{,}2 = 1$, et $-i \times i = -i^2 = 1$. L'inverse de i est son opposé : un complexe de module 1 a pour inverse son conjugué.

Réponse. $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$, $-i$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Correction de l'exercice 4 – Quotients

Dans chaque cas, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, pour rendre celui-ci réel :

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{5} = \frac{6+3i+2i-1}{5} = 1+i$$

De même, $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$ et $\dfrac{2i}{3+4i} = \dfrac{2i(3-4i)}{25} = \dfrac{8+6i}{25}$. **Contrôle** : $(1+i)(2-i) = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$; et le dernier quotient a pour module $\dfrac{|2i|}{|3+4i|} = \dfrac{2}{5}$, comme $\sqrt{0{,}32^2 + 0{,}24^2} = 0{,}4$.

Réponse. $1+i$, i et $\dfrac{8}{25} + \dfrac{6}{25}i$.

Correction de l'exercice 5 – Puissances de i à exposant élevé

Comme $i^4 = 1$, i^n ne dépend que du reste de n dans la division par 4. Avec $2027 = 4 \times 506 + 3$, on obtient $i^{2027} = i^3 = -i$. Pour un exposant négatif, on ajoute un multiple de 4 : $i^{-13} = i^{-13} \times i^{16} = i^3 = -i$.

La somme compte 2027 termes, de i^0 à i^{2026}. Les 506 premiers blocs de quatre termes valent chacun $1 + i - 1 - i = 0$; il reste les trois derniers termes, $i^{2024} + i^{2025} + i^{2026} = 1 + i - 1$, donc

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2026} = i$$

Contrôle par la formule des sommes géométriques : $\dfrac{1 - i^{2027}}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} = i$, calculé à l'exercice 4.

Réponse. $i^{2027} = -i$, $i^{-13} = -i$ et la somme vaut i.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Les puissances de 1 + i

Tout repose sur le carré : $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. On en déduit $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$ et $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$. Comme 2026 est pair,

$$(1+i)^{2026} = \left[(1+i)^2\right]^{1013} = (2i)^{1013} = 2^{1013}\, i^{1013} = 2^{1013}\, i$$

car $1013 = 4 \times 253 + 1$ donne $i^{1013} = i$. **Contrôle** par le module : $|1+i| = \sqrt{2}$, donc $|(1+i)^{2026}| = \left(\sqrt{2}\right)^{2026} = 2^{1013}$. On laisse le résultat sous forme de puissance.

Réponse. $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^4 = -4$, $(1+i)^8 = 16$ et $(1+i)^{2026} = 2^{1013}\, i$.

Correction de l’exercice 7 – Conjuguer un quotient de deux façons

On multiplie numérateur et dénominateur par $1 - 3i$, conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2 - 6i - i - 3}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$$

Première façon : on change le signe de la partie imaginaire, $\overline{z} = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$. Seconde façon : le conjugué d’un quotient est le quotient des conjugués, donc $\overline{z} = \dfrac{2+i}{1-3i} = \dfrac{(2+i)(1+3i)}{10} = \dfrac{-1+7i}{10}$. Les deux méthodes concordent. **Contrôle** : $|z| = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $\sqrt{0{,}01 + 0{,}49} = \sqrt{0{,}5}$.

Réponse. $z = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{7}{10}i$ et $\overline{z} = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$.

Correction de l’exercice 8 – Modules d’expressions composées

On a $|z| = \sqrt{9+16} = 5$ et $|z'| = \sqrt{2}$. Le module est compatible avec le produit, le quotient et les puissances :

$$|zz'| = |z|\,|z'| = 5\sqrt{2} \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \qquad |z^5| = |z|^5 = 3\,125$$

Contrôle : $zz' = (3-4i)(1+i) = 7 - i$, de module $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Calculer z^5 sous forme algébrique demanderait quatre produits ; son module ne demande qu’une puissance de 5.

Réponse. $|z| = 5$, $|zz'| = 5\sqrt{2}$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ et $\left|z^5\right| = 3\,125$.

Correction de l’exercice 9 – Réel ou imaginaire pur selon un paramètre

On met d’abord z_m sous forme algébrique en multipliant par $1 + i$:

$$z_m = \frac{(m+i)(1+i)}{2} = \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2}\,i$$

z_m est réel quand sa partie imaginaire est nulle : $m + 1 = 0$, soit $m = -1$, et alors $z_{-1} = -1$. Il est imaginaire pur quand sa partie réelle est nulle : $m - 1 = 0$, soit $m = 1$, et alors $z_1 = i$. **Contrôle** : $\dfrac{-1+i}{1-i} = \dfrac{-(1-i)}{1-i} = -1$ et $\dfrac{1+i}{1-i} = i$.

Réponse. z_m est réel pour $m = -1$ (et vaut -1) et imaginaire pur pour $m = 1$ (et vaut i).

Correction de l’exercice 10 – Équation où le conjugué apparaît

z et $\overline{z}$ ne sont pas des inconnues indépendantes : on pose $z = x + iy$ avec x, y réels. Alors

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$3z - 2\overline{z} = 3x + 3iy - 2x + 2iy = x + 5iy$$

L'équation $x + 5iy = 5 + 15i$ équivaut, par identification des parties réelles et imaginaires, à $x = 5$ et $5y = 15$: $z = 5 + 3i$. **Contrôle** :
$3(5 + 3i) - 2(5 - 3i) = 15 + 9i - 10 + 6i = 5 + 15i$. Écrire « $z = \dfrac{5 + 15i}{3 - 2}$ » serait faux : ce serait traiter $\overline{z}$ comme z.

Réponse. $z = 5 + 3i$.

Correction de l'exercice 11 – Second degré à coefficients réels

Le discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = -16 < 0$. Pour une équation à coefficients réels, on obtient deux solutions conjuguées :

$$z = \frac{6 \pm i\sqrt{16}}{2} = 3 \pm 2i$$

donc $S = \{3 - 2i\,;\, 3 + 2i\}$. **Contrôle** : la somme des solutions vaut $6 = -\dfrac{b}{a}$ et leur produit $(3 - 2i)(3 + 2i) = 13 = \dfrac{c}{a}$.

Réponse. $S = \{3 - 2i\,;\, 3 + 2i\}$.

Correction de l'exercice 12 – Second degré avec a différent de 1

Le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$, et $\sqrt{36} = 6$. Sans oublier le dénominateur $2a = 4$:

$$z = \frac{-2 \pm 6i}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Contrôle : la somme des solutions vaut $-1 = -\dfrac{b}{a}$, et leur produit
$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} = \dfrac{c}{a}$.

Réponse. $S = \left\langle -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i\,;\, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i \right\rangle$.

Correction de l'exercice 13 – Somme et produit des racines

Pour $az^2 + bz + c = 0$, on a $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 4$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} = 29$. On en déduit, sans connaître les racines,

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 16 - 58 = -42$$

Vérification : $\Delta = 16 - 116 = -100$, donc $z = \dfrac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i$; $(2 + 5i)^2 = -21 + 20i$ et $(2 - 5i)^2 = -21 - 20i$, dont la somme vaut bien -42. Cette somme est réelle, car z_1^2 et z_2^2 sont conjugués.

Réponse. $z_1 + z_2 = 4$, $z_1 z_2 = 29$ et $z_1^2 + z_2^2 = -42$; les racines sont $2 + 5i$ et $2 - 5i$.

Correction de l'exercice 14 – Factoriser un polynôme dans C

a) $\Delta = 4 - 40 = -36$, donc P a pour racines $\dfrac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$, et comme son coefficient dominant vaut 1,

$$P(z) = (z + 1 - 3i)(z + 1 + 3i)$$

Contrôle : ce produit vaut $(z + 1)^2 - (3i)^2 = z^2 + 2z + 1 + 9 = P(z)$.

b) Q est de degré 4 : la formule du second degré ne s'applique pas à lui directement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Mais $Q(z) = (z^2)^2 + 2z^2 + 10 = P(z^2)$: en posant $Z = z^2$, on retrouve le polynôme du a), qui se factorise en $(Z + 1 - 3i)(Z + 1 + 3i)$. Donc $Q(z) = \left(z^2 + 1 - 3i\right)\left(z^2 + 1 + 3i\right)$. Pour aller jusqu'aux racines de Q, il faudrait encore résoudre $z^2 = -1 + 3i$ et $z^2 = -1 - 3i$.

Réponse. $P(z) = (z + 1 - 3i)(z + 1 + 3i)$ et $Q(z) = \left(z^2 + 1 - 3i\right)\left(z^2 + 1 + 3i\right)$.

Correction de l'exercice 15 – Impédance d'un circuit RLC

a) La partie imaginaire de Z vaut $55 - 15 = 40$, donc $Z = 30 + 40i$, et

$$|Z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50\ \Omega$$

b) $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{230}{30 + 40i} = \dfrac{230(30 - 40i)}{2\,500} = 2{,}76 - 3{,}68i$. Son module est $\dfrac{|U|}{|Z|} = \dfrac{230}{50} = 4{,}60$ A.

Contrôle : $\sqrt{2{,}76^2 + 3{,}68^2} = \sqrt{21{,}16} = 4{,}6$.

c) Z est réel quand sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire quand $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$: c'est la résonance. Alors $Z = R = 30\ \Omega$, l'impédance est la plus petite possible et l'intensité la plus grande, $\dfrac{230}{30} \approx 7{,}67$ A.

Réponse. a) $Z = 30 + 40i$ et $|Z| = 50\ \Omega$ · b) $I = 2{,}76 - 3{,}68i$ et $|I| = 4{,}60$ A · c) lorsque $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$ (résonance), et alors $Z = R$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).