Plaquette 1 – Calculs, conjugué, module et équations du second degré

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Tout complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a, b réels et $i^2 = -1$; $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

— **Égalité** : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$. En particulier $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

— **Conjugué** : $\overline{z} = a - ib$. Propriétés :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

— $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$. De plus $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$, et z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

— **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec $|zz'| = |z||z'|$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $|\overline{z}| = |z|$.

— **Quotient** : on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

— **Puissances de** i : $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, puis périodicité de 4.

— **Second degré** à coefficients réels, $\Delta < 0$: les deux solutions sont conjuguées,

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Correction de l'exercice 1 – Opérations de base

On traite séparément parties réelles et imaginaires, puis on développe le produit.

— $z + z' = (3 - 1) + (-2 + 4)i = 2 + 2i$.

— $z - z' = (3 + 1) + (-2 - 4)i = 4 - 6i$.

— $2z = 6 - 4i$ et $3z' = -3 + 12i$, donc $2z - 3z' = 9 - 16i$.

— Produit : $zz' = (3 - 2i)(-1 + 4i) = -3 + 12i + 2i - 8i^2 = -3 + 14i + 8 = 5 + 14i$.

— Contrôle du produit par les modules : $|z| = \sqrt{13}$, $|z'| = \sqrt{17}$, et $|zz'| = \sqrt{25 + 196} = \sqrt{221} = \sqrt{13 \times 17}$. Cohérent.

Réponse. $2 + 2i$; $4 - 6i$; $9 - 16i$; $5 + 14i$.

Correction de l'exercice 2 – Puissances de i

Les puissances de i sont périodiques de période 4 : on divise l'exposant par 4 et on regarde le **reste**.

— $15 = 4 \times 3 + 3$, donc $i^{15} = i^3 = -i$.

— $102 = 4 \times 25 + 2$, donc $i^{102} = i^2 = -1$.

— $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

— $(1 + i)^4 = \left((1 + i)^2\right)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$.

— Contrôle : $|(1 + i)^4| = |1 + i|^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4 = |-4|$. Cohérent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $-i$; -1 ; $2i$; -4.

Correction de l'exercice 3 – Conjugué et propriétés

a) $\overline{z} = 5 + 3i$.

— $z + \overline{z} = 10 = 2\mathrm{Re}(z)$.

— $z - \overline{z} = -6i = 2i\mathrm{Im}(z)$ (avec $\mathrm{Im}(z) = -3$).

— $z\overline{z} = (5 - 3i)(5 + 3i) = 25 - 9i^2 = 25 + 9 = 34$.

b) $|z| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$, donc $|z|^2 = 34 = z\overline{z}$. La propriété du cours est vérifiée.

— À retenir : $z\overline{z}$ est toujours un **réel positif**, ce qui justifie la technique du quotient.

Réponse. a) $5 + 3i$; 10 ; $-6i$; 34 · b) $|z|^2 = 34$.

Correction de l'exercice 4 – Quotient

Méthode du cours : on multiplie par le **conjugué du dénominateur**.

$$Z = \frac{(4 + 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)}$$

— Dénominateur : $1 + 4 = 5$ (réel).

— Numérateur : $4 + 8i + 3i + 6i^2 = 4 + 11i - 6 = -2 + 11i$.

— Donc $Z = \dfrac{-2 + 11i}{5} = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{5}i$.

— Contrôle par les modules : $|Z| = \dfrac{|4 + 3i|}{|1 - 2i|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, et $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4 + 121}{25}} = \sqrt{5}$. Cohérent.

Réponse. $Z = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{5}i$.

Correction de l'exercice 5 – Inverse d'un complexe

— $\dfrac{1}{2 - i} = \dfrac{2 + i}{(2 - i)(2 + i)} = \dfrac{2 + i}{4 + 1} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

— Module : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \sqrt{\dfrac{4}{25} + \dfrac{1}{25}} = \sqrt{\dfrac{5}{25}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

— Or $|z| = \sqrt{5}$, donc $\dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$: la propriété est vérifiée.

— Formule générale utile : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Réponse. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$, de module $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Correction de l'exercice 6 – Équation du premier degré

On isole z, puis on met le quotient sous forme algébrique.

$$z = \frac{5 - 5i}{2 + i} = \frac{(5 - 5i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

— Dénominateur : $4 + 1 = 5$.

— Numérateur : $10 - 5i - 10i + 5i^2 = 10 - 15i - 5 = 5 - 15i$.

— Donc $z = \dfrac{5 - 15i}{5} = 1 - 3i$.

— Vérification : $(2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i + 3 = 5 - 5i$. Correct.

Réponse. $z = 1 - 3i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Partie réelle et imaginaire d'une expression

— $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\,i$.
— Donc $\mathrm{Re}(Z) = x^2 - y^2$ et $\mathrm{Im}(Z) = 2xy$.
— L'équation $z^2 = -9$ se traduit par le système $x^2 - y^2 = -9$ et $2xy = 0$.
— De $2xy = 0$: $x = 0$ ou $y = 0$. Si $y = 0$, alors $x^2 = -9$, impossible pour x réel. Donc $x = 0$, puis $-y^2 = -9$, soit $y = \pm 3$.
— Les solutions sont $z = 3i$ et $z = -3i$.
— Vérification : $(3i)^2 = 9i^2 = -9$. Correct.

Réponse. Re $= x^2 - y^2$, Im $= 2xy$; $z = \pm 3i$.

Correction de l'exercice 8 – Second degré à discriminant négatif

On calcule le discriminant, comme dans $\mathbb{R}$.

— $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36 < 0$.
— Comme $\Delta < 0$, on écrit $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{36} = 6$, et les solutions sont

$$z_1 = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i \qquad z_2 = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

— Les deux solutions sont **conjuguées** : c'est toujours le cas lorsque les coefficients sont réels.
— Vérification pour z_2 : $(2+3i)^2 - 4(2+3i) + 13 = (4 + 12i - 9) - 8 - 12i + 13 = 0$. Correct.

Réponse. $z = 2 - 3i$ ou $z = 2 + 3i$.

Correction de l'exercice 9 – Somme et produit des racines

a) $\Delta = 4 - 20 = -16$, donc $\sqrt{-\Delta} = 4$ et

$$z_1 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i \qquad z_2 = -1 + 2i$$

b) Somme : $(-1 - 2i) + (-1 + 2i) = -2$, ce qui correspond à $-\dfrac{b}{a} = -2$.

— Produit : $(-1 - 2i)(-1 + 2i) = 1 - 4i^2 = 1 + 4 = 5$, ce qui correspond à $\dfrac{c}{a} = 5$.
— Les relations entre coefficients et racines restent donc valables dans $\mathbb{C}$.

Réponse. a) $-1 \pm 2i$ · b) somme -2, produit 5.

Correction de l'exercice 10 – Factorisation d'un polynôme

a) $\Delta = 36 - 40 = -4$, donc $\sqrt{-\Delta} = 2$ et les racines sont

$$z_1 = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i \qquad z_2 = 3 + i$$

b) Un polynôme du second degré se factorise avec ses racines :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) = (z - (3 - i))(z - (3 + i))$$

— Contrôle en développant :
$(z - 3 + i)(z - 3 - i) = (z - 3)^2 - i^2 = z^2 - 6z + 9 + 1 = z^2 - 6z + 10$. Correct.

Réponse. a) $3 \pm i$ · b) $P(z) = (z - 3 + i)(z - 3 - i)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Caractériser un ensemble de points

a) $|z|$ est la distance de M à l'origine O : l'ensemble est le **cercle** de centre O et de rayon 3.

b) En notant A d'affixe 2 et B d'affixe -2, la condition s'écrit $AM = BM$.

— L'ensemble est donc la **médiatrice** du segment $[AB]$, c'est-à-dire l'**axe des imaginaires purs** (la droite d'équation $x = 0$).

— Vérification algébrique avec $z = x + iy$: $|z-2|^2 = (x-2)^2 + y^2$ et $|z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2$. L'égalité donne $-4x = 4x$, donc $x = 0$. Cohérent.

Réponse. a) cercle de centre O et de rayon 3 · b) l'axe des imaginaires purs.

Correction de l'exercice 12 – Lire des affixes sur une figure

Le point de coordonnées $(x\,;y)$ a pour affixe $x + iy$: on lit l'abscisse sur l'axe des réels et l'ordonnée sur l'axe des imaginaires purs.

— $A(2\,;3)$ a pour affixe $z_A = 2 + 3i$ et $B(-3\,;1)$ a pour affixe $z_B = -3 + i$.

— $C(-2\,;-2)$ a pour affixe $z_C = -2 - 2i$, et $D(4\,;0)$, sur l'axe des réels, a pour affixe le réel 4.

L'affixe du milieu est la moyenne des affixes :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{(2+3i)+(-2-2i)}{2} = \frac{i}{2}$$

I est donc sur l'axe des imaginaires purs, au point $\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$, ce que confirme la figure.

Réponse. $z_A = 2 + 3i$, $z_B = -3 + i$, $z_C = -2 - 2i$, $z_D = 4$ et $z_I = \frac{1}{2}i$.

Correction de l'exercice 13 – Module et distance

a) $|z_A| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $|z_B| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Le module de l'affixe d'un point est sa distance à l'origine : $OA = \sqrt{5}$ et $OB = 2\sqrt{5}$.

b) La distance entre deux points est le module de la différence de leurs affixes :

$$AB = |z_B - z_A| = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Contrôle par les coordonnées : $\overrightarrow{AB}(3\,;-4)$ et $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. On remarque que $OA^2 + AB^2 = 5 + 25 = 30 \neq 20 = OB^2$: le triangle OAB n'est pas rectangle en A.

Réponse. a) $|z_A| = \sqrt{5} = OA$ et $|z_B| = 2\sqrt{5} = OB$ · b) $AB = 5$.

Correction de l'exercice 14 – Conjugué, opposé et symétries

On calcule les trois affixes : $\overline{z} = 2 - 3i$, $-z = -2 - 3i$ et $-\overline{z} = -2 + 3i$, soit $N(2\,;-3)$, $P(-2\,;-3)$ et $Q(-2\,;3)$.

— Passer de z à $\overline{z}$ change l'ordonnée en son opposé : N est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

— Passer de z à $-z$ change les deux coordonnées : P est le symétrique de M par rapport à l'origine O.

— Passer de z à $-\overline{z}$ change seulement l'abscisse : Q est le symétrique de M par rapport à l'axe des imaginaires purs.

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = \sqrt{13}$$

Les quatre points sont sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{13}$: ces symétries

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

conservent la distance à l'origine.

Réponse. $N(2-3i)$: symétrie d'axe des réels · $P(-2-3i)$: symétrie de centre O · $Q(-2+3i)$: symétrie d'axe des imaginaires purs.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : équation de degré 3

a) $P(3) = 27 - 27 + 12 - 12 = 0$: 3 est bien racine.

b) On identifie les coefficients en développant $(z-3)(z^2+\alpha z+\beta)$:

— $z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 3z^2 - 3\alpha z - 3\beta = z^3 + (\alpha-3)z^2 + (\beta-3\alpha)z - 3\beta$.

— En comparant : $\alpha - 3 = -3$ donne $\alpha = 0$; $-3\beta = -12$ donne $\beta = 4$; contrôle sur le terme en z : $\beta - 3\alpha = 4$. Cohérent.

$$P(z) = (z-3)(z^2+4)$$

c) $P(z) = 0$ donne $z = 3$ ou $z^2 + 4 = 0$, soit $z^2 = -4$.

— Donc $z = 2i$ ou $z = -2i$.

— Les trois solutions sont 3, $2i$ et $-2i$.

— Vérification : $(2i)^3 - 3(2i)^2 + 4(2i) - 12 = -8i + 12 + 8i - 12 = 0$. Correct.

Réponse. a) $P(3) = 0$ · b) $(z-3)(z^2+4)$ · c) $z \in \{3\,;2i\,;-2i\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).