Plaquette 2 – Conjugué, module et parties réelle et imaginaire

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois identités fondamentales.

$$z\overline{z} = |z|^2 \qquad z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \qquad z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$$

Pour $z = a + ib$ avec a et b réels :

$$\overline{z} = a - ib \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \mathrm{Re}(z) = a \qquad \mathrm{Im}(z) = b$$

Propriétés du conjugué. La conjugaison est compatible avec toutes les opérations :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Propriétés du module.

$$|zz'| = |z||z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad |z^n| = |z|^n$$

Attention : $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ en général, on a seulement l'**inégalité triangulaire** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Mettre un quotient sous forme algébrique. On multiplie par le **conjugué du dénominateur** :

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$$

Caractérisations utiles.

Condition	Équivalence
z est réel	$\overline{z} = z$, ou $\mathrm{Im}(z) = 0$
z est imaginaire pur	$\overline{z} = -z$
$\lvert z\rvert = 1$	$z\overline{z} = 1$, donc $\frac{1}{z} = \overline{z}$

Puissances de i. Elles sont périodiques de période 4 : $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$. Pour calculer i^n, on regarde le **reste de n modulo** 4.

Correction de l'exercice 1 – Forme algébrique d'un produit

On développe comme avec des réels, puis on remplace i^2 par -1 :

$$z_1 z_2 = (3 - 2i)(-1 + 4i) = -3 + 12i + 2i - 8i^2 = -3 + 14i + 8 = 5 + 14i$$

De même, $z_1^2 = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i$. Enfin $z_1 + z_2 = 2 + 2i = 2(1 + i)$ et $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, donc $(z_1 + z_2)^2 = 4 \times 2i = 8i$.

Contrôle par les modules : $|z_1| = \sqrt{13}$ et $|z_2| = \sqrt{17}$, donc $|z_1 z_2|$ doit valoir $\sqrt{221}$; on trouve bien $|5 + 14i| = \sqrt{25 + 196} = \sqrt{221}$.

Réponse. $z_1 z_2 = 5 + 14i$, $z_1^2 = 5 - 12i$ et $(z_1 + z_2)^2 = 8i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Quotient sous forme algébrique

Pour écrire un quotient sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, ce qui rend celui-ci réel : $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

$$\frac{2+3i}{1-2i}=\frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{2+4i+3i-6}{1+4}=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$$

De même, $\dfrac{5}{3+4i}=\dfrac{5(3-4i)}{9+16}=\dfrac{15-20i}{25}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$. **Contrôle** : $(-0{,}8+1{,}4i)(1-2i)=-0{,}8+1{,}6i+1{,}4i+2{,}8=2+3i$. Le second quotient a pour module $\dfrac{5}{|3+4i|}=1$, et en effet $0{,}6^2+0{,}8^2=1$.

Réponse. $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i$ et $\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$.

Correction de l'exercice 3 – Puissances de i

Comme $i^4=(i^2)^2=1$, les puissances de i se répètent de 4 en 4 : i^n ne dépend que du reste de n dans la division par 4. Or $2026=4\times506+2$, donc

$$i^{2026}=\left(i^4\right)^{506}\times i^2=-1$$

Pour i^{-7}, on multiplie par $i^8=1$: $i^{-7}=i^{-7}\times i^8=i$. La somme $1+i+i^2+\cdots+i^{99}$ compte 100 termes, qu'on regroupe en 25 blocs de quatre termes consécutifs ; chaque bloc vaut $i^{4k}(1+i-1-i)=0$, donc la somme est nulle. **Contrôle** par la formule des suites géométriques : $\dfrac{1-i^{100}}{1-i}=\dfrac{1-1}{1-i}=0$.

Réponse. $i^{2026}=-1$, $i^{-7}=i$ et la somme vaut 0.

Correction de l'exercice 4 – Résoudre une équation avec le conjugué

L'équation fait intervenir z et $\overline{z}$: on pose $z=x+iy$ avec x, y réels, de sorte que $\overline{z}=x-iy$. Alors

$$2z+3\overline{z}=2x+2iy+3x-3iy=5x-iy$$

L'équation devient $5x-iy=5-4i$. Deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : $5x=5$ et $-y=-4$, d'où $x=1$, $y=4$ et $z=1+4i$. **Contrôle** : $2(1+4i)+3(1-4i)=2+8i+3-12i=5-4i$.

Réponse. $z=1+4i$.

Correction de l'exercice 5 – Module et inégalité triangulaire

On calcule les modules : $|z_1|=\sqrt{16+9}=5$, $|z_2|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, et $z_1+z_2=3+5i$, de module $\sqrt{34}$.

$$|z_1+z_2|=\sqrt{34}\approx5{,}83\quad<\quad|z_1|+|z_2|=5+\sqrt{5}\approx7{,}24$$

C'est l'inégalité triangulaire : dans le triangle formé par O, le point M_1 d'affixe z_1 et le point d'affixe z_1+z_2, un côté est plus court que la somme des deux autres. L'égalité n'a lieu que lorsque le triangle est aplati dans le bon sens, c'est-à-dire lorsque $z_2=kz_1$ avec k réel positif. Ici $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{(-1+2i)(4-3i)}{25}=\dfrac{2+11i}{25}$ n'est pas réel, donc l'inégalité est stricte. **Contrôle** : avec $z_2=2z_1=8+6i$, on aurait $|12+9i|=15=5+10$.

Réponse. $\sqrt{34}\approx5{,}83<5+\sqrt{5}\approx7{,}24$; l'égalité exige $z_2=kz_1$ avec $k\geq0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Caractériser un réel

Un complexe Z est réel si et seulement si $\overline{Z} = Z$. Avec $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z}-2}{\overline{z}+1}$, la condition s’écrit, après produit en croix,

$$(z-2)(\overline{z}+1) = (\overline{z}-2)(z+1) \Leftrightarrow z\overline{z} + z - 2\overline{z} - 2 = z\overline{z} + \overline{z} - 2z - 2$$

Après simplification, il reste $3z = 3\overline{z}$, soit $z = \overline{z}$: z est réel. L’ensemble cherché est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **Contrôle** : pour $z = 5$, $Z = \dfrac{3}{6}$ est réel ; pour $z = i$, $Z = \dfrac{-1+3i}{2}$ ne l’est pas. Géométriquement, Z réel signifie que les points d’affixes 2, -1 et z sont alignés, donc que z est sur l’axe réel.

Réponse. Z est réel si et seulement si z est réel : l’ensemble est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Correction de l’exercice 7 – Caractériser un imaginaire pur

Z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{Z} = -Z$. Après produit en croix, $(\overline{z}+3)(z-1) = -(z+3)(\overline{z}-1)$, soit en développant

$$z\overline{z} - \overline{z} + 3z - 3 = -z\overline{z} + z - 3\overline{z} + 3 \Leftrightarrow z\overline{z} + z + \overline{z} - 3 = 0$$

Avec $z = x + iy$, on a $z\overline{z} = x^2 + y^2$ et $z + \overline{z} = 2x$, d’où $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, c’est-à-dire $(x+1)^2 + y^2 = 4$. L’ensemble est le cercle de centre $(-1\,;0)$ et de rayon 2, privé du point d’affixe 1, qui est exclu. **Contrôle** : pour $z = -1 + 2i$, $Z = \dfrac{2+2i}{-2+2i} = -i$ est bien imaginaire pur. C’est le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-3)$ et $B(1)$: Z imaginaire pur signifie que $A\hat{M}B$ est droit.

Réponse. Le cercle de centre -1 et de rayon 2, privé du point 1 (c’est le cercle de diamètre $[-3\,;1]$).

Correction de l’exercice 8 – Équation du second degré à coefficients réels

Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 4 \times 34 = -100 < 0$: l’équation a deux racines complexes conjuguées. Comme $\Delta = (10i)^2$,

$$z = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$$

Un polynôme $az^2 + bz + c$ de racines z_1, z_2 se factorise en $a(z - z_1)(z - z_2)$: $z^2 - 6z + 34 = (z - 3 - 5i)(z - 3 + 5i)$. **Contrôle** : $(z-3)^2 - (5i)^2 = z^2 - 6z + 9 + 25 = z^2 - 6z + 34$. Les deux racines sont symétriques par rapport à l’axe réel, ce qui est toujours le cas pour un polynôme à coefficients réels.

Réponse. $z = 3 \pm 5i$, et $z^2 - 6z + 34 = (z - 3 - 5i)(z - 3 + 5i)$.

Correction de l’exercice 9 – Racines carrées d’un complexe

On pose $z = x + iy$. L’égalité $z^2 = 3 + 4i$ donne deux équations (parties réelles et imaginaires), et l’égalité des modules $|z|^2 = |3 + 4i|$ en donne une troisième :

$$x^2 - y^2 = 3 \qquad 2xy = 4 \qquad x^2 + y^2 = 5$$

En ajoutant la première et la troisième, $2x^2 = 8$, donc $x = \pm 2$; en les soustrayant, $2y^2 = 2$, donc $y = \pm 1$. La deuxième équation impose $xy = 2 > 0$: x et y ont le même signe. Les solutions sont $z = 2 + i$ et $z = -2 - i$, qui sont opposées. **Contrôle** : $(2+i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$.

Réponse. $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Équation du second degré à coefficients complexes

Le discriminant vaut $\Delta = (3+i)^2 - 4(2+2i) = 8 + 6i - 8 - 8i = -2i$. On cherche δ tel que $\delta^2 = -2i$: avec $\delta = x + iy$, on obtient $x^2 - y^2 = 0$, $2xy = -2$ et $x^2 + y^2 = 2$, d'où $x^2 = y^2 = 1$ avec $xy < 0$, et l'on prend $\delta = 1 - i$. Les solutions sont

$$z = \frac{(3+i) \pm (1-i)}{2} \quad \text{soit} \quad z = 2 \quad \text{ou} \quad z = 1 + i$$

Contrôle par les relations entre coefficients et racines : la somme $2 + (1+i) = 3 + i$ et le produit $2(1+i) = 2 + 2i$ correspondent bien aux coefficients. Les racines ne sont pas conjuguées, car les coefficients ne sont pas réels.

Réponse. $z = 2$ ou $z = 1 + i$.

Correction de l'exercice 11 – Ensemble de points : module constant

$|z - z_\Omega|$ est la distance entre M et le point d'affixe z_Ω. La première condition s'écrit $|z - (2-i)| = 3$: M est à la distance 3 du point $\Omega(2\,;-1)$, donc

$$E_1 \text{ est le cercle de centre } \Omega(2\,;-1) \text{ et de rayon } 3$$

La seconde s'écrit $|z - 1| = |z - (-3i)|$: M est à égale distance de $A(1\,;0)$ et de $B(0\,;-3)$, c'est donc la médiatrice de $[AB]$. **Contrôle** par le calcul : $(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+3)^2$ donne $-2x + 1 = 6y + 9$, soit $x + 3y + 4 = 0$, et le milieu $(0{,}5\,;-1{,}5)$ vérifie bien $0{,}5 - 4{,}5 + 4 = 0$.

Réponse. Un cercle de centre $2 - i$ et de rayon 3 ; puis la médiatrice d'équation $x + 3y + 4 = 0$.

Correction de l'exercice 12 – Calculer une somme de puissances

On calcule les puissances successives : $z^2 = (1+i)^2 = 2i$, $z^4 = (2i)^2 = -4$ et $z^8 = (-4)^2 = 16$. Comme $2026 = 8 \times 253 + 2$,

$$z^{2026} = \left(z^8\right)^{253} \times z^2 = 16^{253} \times 2i = 2^{1012} \times 2i = 2^{1013}\,i$$

Contrôle par le module : $|z| = \sqrt{2}$, donc $\left|z^{2026}\right| = \left(\sqrt{2}\right)^{2026} = 2^{1013}$, ce qui est bien le module du résultat. Le résultat est imaginaire pur, comme z^2.

Réponse. $z^2 = 2i$, $z^4 = -4$, $z^8 = 16$ et $z^{2026} = 2^{1013} i$.

Correction de l'exercice 13 – Système dans C

En soustrayant la seconde équation de la première, on élimine z : $(z + z') - (z - iz') = (3+i) - (1-2i)$, soit $z'(1+i) = 2 + 3i$. Donc

$$z' = \frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{2} = \frac{5+i}{2} = 2{,}5 + 0{,}5i$$

puis $z = 3 + i - z' = 0{,}5 + 0{,}5i$. **Contrôle** dans la seconde équation : $iz' = 2{,}5i - 0{,}5$, et $z - iz' = 0{,}5 + 0{,}5i + 0{,}5 - 2{,}5i = 1 - 2i$.

Réponse. $z = 0{,}5 + 0{,}5i$ et $z' = 2{,}5 + 0{,}5i$.

Correction de l'exercice 14 – Démontrer une identité

On utilise $|w|^2 = w\overline{w}$ et $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$:

$$|z + z'|^2 = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \qquad |z - z'|^2 = z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

En ajoutant, les termes croisés s'éliminent et il reste $2z\overline{z} + 2z'\overline{z'} = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$. C'est la **loi du parallélogramme** : dans le parallélogramme construit sur les vecteurs d'affixes z et z', la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés. **Contrôle** avec $z = 3 + i$ et $z' = 1 - 2i$: $|4 - i|^2 + |2 + 3i|^2 = 17 + 13 = 30 = 2(10 + 5)$.

Réponse. En développant $|w|^2 = w\overline{w}$, les termes croisés s'annulent : c'est la loi du parallélogramme.

Correction de l'exercice 15 – Ensemble défini par un quotient de modules

La condition s'écrit $|z + 1| = 2|z - 2|$, c'est-à-dire $MA = 2MB$ avec $A(-1)$ et $B(2)$. On passe aux carrés avec $z = x + iy$:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\left[(x-2)^2 + y^2\right] \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$$

L'ensemble est le cercle de centre $(3\,;0)$ et de rayon 2 (un cercle d'Apollonius). **Contrôle** : $z = 1$ et $z = 5$ sont sur ce cercle, et $\left|\frac{2}{-1}\right| = \left|\frac{6}{3}\right| = 2$. Le point $B(2)$, exclu, n'est pas sur le cercle, car $(2-3)^2 = 1 \neq 4$.

Réponse. Le cercle de centre 3 et de rayon 2 (cercle d'Apollonius).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : étude complète d'une expression

a) On multiplie par le conjugué du dénominateur, $2 + i$:

$$z = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2 + i + 6i - 3}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

b) Le module d'un quotient est le quotient des modules : $|z| = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$, et $z\overline{z} = |z|^2 = 2$.

c) $z^2 = (-0{,}2 + 1{,}4i)^2 = 0{,}04 - 0{,}56i - 1{,}96 = -1{,}92 - 0{,}56i$, puis $z^3 = z^2 \times z = 1{,}168 - 2{,}576i$. Les modules se multiplient : $|z^{12}| = \left(\sqrt{2}\right)^{12} = 2^6 = 64$; en calculant $z^4 = \left(z^2\right)^2 = 3{,}3728 + 2{,}1504i$ puis $z^{12} = \left(z^4\right)^3$, on trouve $z^{12} \approx -8{,}42 + 63{,}44i$, dont le module vaut bien environ 64.

d) $|w - z| = \sqrt{2}$ signifie que M est à la distance $\sqrt{2}$ du point d'affixe z : c'est le cercle de centre $\left(-\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Il passe par l'origine, puisque la distance de 0 à z est $|z| = \sqrt{2}$.

Réponse. a) $z = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ · b) $|z| = \sqrt{2}$ et $z\overline{z} = 2$ · c) $z^2 = -1{,}92 - 0{,}56i$, $z^3 = 1{,}168 - 2{,}576i$, $\left|z^{12}\right| = 64$ · d) le cercle de centre z et de rayon $\sqrt{2}$, passant par l'origine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).