

Plaquette 2 - Conjugué, module et parties réelle et imaginaire

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois identités fondamentales.

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Pour $z = a + ib$ avec a et b réels :

$$\bar{z} = a - ib \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \operatorname{Re}(z) = a \quad \operatorname{Im}(z) = b$$

Propriétés du conjugué. La conjugaison est compatible avec toutes les opérations :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

Propriétés du module.

$$|zz'| = |z||z'| \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n$$

Attention : $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ en général, on a seulement l'**inégalité triangulaire** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Mettre un quotient sous forme algébrique. On multiplie par le **conjugué du dénominateur** :

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$$

Caractérisations utiles.

Condition	Équivalence
z est réel	$\bar{z} = z$, ou $\operatorname{Im}(z) = 0$
z est imaginaire pur	$\bar{z} = -z$
$ z = 1$	$z\bar{z} = 1$, donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$

Puissances de i . Elles sont périodiques de période 4 : $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$. Pour calculer i^n , on regarde le **reste de n modulo 4**.

Correction de l'exercice 1 - Forme algébrique d'un produit

- **Produit** : on développe, en utilisant $i^2 = -1$ ✓
- **Calcul** : $(3 - 2i)(-1 + 4i) = -3 + 12i + 2i - 8i^2$ ✓
- **Simplification** : $-3 + 14i + 8$ ✓
- **Résultat** :

$$z_1 z_2 = 5 + 14i$$

- **Carré de z_1** : $(3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2$ ✓
- **Simplification** : $9 - 12i - 4$ ✓
- **Résultat** :

$$z_1^2 = 5 - 12i$$

- **Somme** : $z_1 + z_2 = 2 + 2i$ ✓
- **Carré de la somme** : $(2 + 2i)^2 = 4 + 8i + 4i^2 = 8i$ ✓
- **Résultat** :

$$(z_1 + z_2)^2 = 8i$$

- **Contrôle de ce dernier** : $2 + 2i = 2(1 + i)$, et $(1 + i)^2 = 2i$ ✓
- **Donc** : $4 \times 2i = 8i$ ✓
- **Contrôle du produit par les modules** : $|z_1| = \sqrt{13}$ et $|z_2| = \sqrt{17}$ ✓
- **Produit des modules** : $\sqrt{221} \approx 14,866$ ✓
- **Module du produit** : $\sqrt{25 + 196} = \sqrt{221}$ ✓
- **Cohérence** : les deux valeurs coïncident ✓
- **Contrôle de z_1^2** : $|z_1^2| = 13$, et $\sqrt{25 + 144} = 13$ ✓

Réponse. $z_1 z_2 = 5 + 14i$, $z_1^2 = 5 - 12i$ et $(z_1 + z_2)^2 = 8i$.

Correction de l'exercice 2 - Quotient sous forme algébrique

- **Méthode** : multiplier par le conjugué du dénominateur ✓
- **Premier quotient** : on multiplie par $1 + 2i$ ✓
- **Dénominateur** : $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5$ ✓
- **Numérateur** : $(2 + 3i)(1 + 2i) = 2 + 4i + 3i + 6i^2$ ✓
- **Simplification** : $2 + 7i - 6 = -4 + 7i$ ✓
- **Résultat** :

$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{-4 + 7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

- **Contrôle** : $(-0,8 + 1,4i)(1 - 2i) = -0,8 + 1,6i + 1,4i + 2,8 = 2 + 3i$ ✓
- **Second quotient** : on multiplie par $3 - 4i$ ✓
- **Dénominateur** : $9 + 16 = 25$ ✓
- **Numérateur** : $5(3 - 4i) = 15 - 20i$ ✓
- **Résultat** :

$$\frac{5}{3 + 4i} = \frac{15 - 20i}{25} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

- **Contrôle** : $(0,6 - 0,8i)(3 + 4i) = 1,8 + 2,4i - 2,4i + 3,2 = 5$ ✓
- **Contrôle par les modules** : $\left| \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \right| = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2,6} \approx 1,612$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{0,64 + 1,96} = \sqrt{2,6}$ ✓
- **Contrôle du second** : $\frac{5}{\sqrt{25}} = 1$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{0,36 + 0,64} = 1$ ✓
- **Observation** : $\frac{5}{3 + 4i}$ est de module 1, c'est $\overline{\left(\frac{3 + 4i}{5} \right)}$ ✓
- **Justification** : $\frac{5}{3 + 4i} = \frac{5(3 + 4i)}{25} = \frac{3 - 4i}{5}$ ✓

Réponse. $-\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ et $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$.

Correction de l'exercice 3 - Puissances de i

— **Périodicité** : $i^4 = 1$, donc i^n ne dépend que de n modulo 4 ✓

— **Pour** i^{2026} : $2026 = 4 \times 506 + 2$ ✓

— **Donc** :

$$i^{2026} = i^2 = -1$$

— **Contrôle** : 2026 est pair mais pas multiple de 4 ✓

— **Pour** i^{-7} : on écrit $i^{-7} = \frac{1}{i^7}$ ✓

— **Calcul de** i^7 : $7 = 4 + 3$, donc $i^7 = i^3 = -i$ ✓

— **Inverse** : $\frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \times i} = \frac{i}{1} = i$ ✓

— **Donc** :

$$i^{-7} = i$$

— **Contrôle** : $i^{-7} = i^{-7+8} = i^1 = i$ ✓

— **Pour la somme** : c'est une somme géométrique de raison i ✓

— **Nombre de termes** : 100 ✓

— **Observation clé** : 100 est un multiple de 4 ✓

— **Regroupement** : chaque bloc de quatre termes consécutifs vaut $1 + i - 1 - i = 0$ ✓

— **Nombre de blocs** : 25 ✓

— **Résultat** :

$$1 + i + i^2 + \dots + i^{99} = 0$$

— **Contrôle par la formule géométrique** : $\frac{1 - i^{100}}{1 - i} = \frac{1 - 1}{1 - i} = 0$ ✓

— **Variante instructive** : la somme jusqu'à i^{100} vaudrait 1 ✓

Réponse. $i^{2026} = -1$, $i^{-7} = i$ et la somme vaut 0.

Correction de l'exercice 4 - Résoudre une équation avec le conjugué

— **Méthode** : poser $z = x + iy$ avec x et y réels ✓

— **Conjugué** : $\bar{z} = x - iy$ ✓

— **Membre de gauche** : $2(x + iy) + 3(x - iy)$ ✓

— **Développement** : $2x + 2iy + 3x - 3iy = 5x - iy$ ✓

— **Identification des parties réelles** : $5x = 5$ ✓

— **Donc** : $x = 1$ ✓

— **Identification des parties imaginaires** : $-y = -4$ ✓

— **Donc** : $y = 4$ ✓

— **Solution** :

$$z = 1 + 4i$$

— **Vérification** : $\bar{z} = 1 - 4i$ ✓

— **Calcul** : $2(1 + 4i) + 3(1 - 4i) = 2 + 8i + 3 - 12i = 5 - 4i$ ✓

— **Cohérence** : l'équation est bien satisfaite ✓

— **Unicité** : le système en x et y est de Cramer, la solution est unique ✓

— **Piège** : traiter z et $\bar{z}$ comme indépendants donnerait un système 2×2 dans $\mathbb{C}$, sans garantie de compatibilité ✓

— **Cas sans solution** : $z + \bar{z} = i$ n'a aucune solution ✓

- **Justification** : $z + \bar{z} = 2x$ est **réel**, jamais égal à i ✓
- **Cas à une infinité de solutions** : $z - \bar{z} = 0$ a pour solutions tous les **réels** ✓

Réponse. $z = 1 + 4i$.

Correction de l'exercice 5 - Module et inégalité triangulaire

- **Module de z_1** : $\sqrt{16 + 9} = 5$ ✓
 - **Module de z_2** : $\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,236$ ✓
 - **Somme des modules** : $5 + \sqrt{5} \approx 7,236$ ✓
 - **Somme des nombres** : $z_1 + z_2 = 3 + 5i$ ✓
 - **Module de la somme** : $\sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,831$ ✓
 - **Comparaison** :

$$\sqrt{34} \approx 5,831 < 5 + \sqrt{5} \approx 7,236$$
 - **Conclusion** : l'inégalité triangulaire est **stricte** ici ✓
 - **Interprétation géométrique** : les points O , z_1 et $z_1 + z_2$ ne sont pas alignés dans le bon ordre ✓
 - **Condition d'égalité** : z_1 et z_2 doivent être **positivement colinéaires** ✓
 - **Formulation** : il existe $k \geq 0$ tel que $z_2 = kz_1$ (ou $z_1 = 0$) ✓
 - **Test ici** : $\frac{z_2}{z_1} = \frac{(-1 + 2i)(4 - 3i)}{25} = \frac{-4 + 3i + 8i + 6}{25} = \frac{2 + 11i}{25}$ ✓
 - **Verdict** : ce quotient n'est pas un réel positif ✓
 - **Exemple d'égalité** : avec $z_2 = 8 + 6i = 2z_1$ ✓
 - **Contrôle** : $|z_1 + z_2| = |12 + 9i| = 15$ ✓
 - **Et** : $5 + 10 = 15$ ✓
 - **Autre inégalité utile** : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ ✓
 - **Contrôle ici** : $|5 - \sqrt{5}| \approx 2,764$ et $|z_1 - z_2| = |5 + i| = \sqrt{26} \approx 5,099$ ✓
- Réponse.** $\sqrt{34} \approx 5,83 < 5 + \sqrt{5} \approx 7,24$; l'égalité exige $z_2 = kz_1$ avec $k \geq 0$.

Correction de l'exercice 6 - Caractériser un réel

- **Critère** : Z est réel si et seulement si $\bar{Z} = Z$ ✓
- **Conjugué** : $\bar{Z} = \frac{\bar{z} - 2}{\bar{z} + 1}$ ✓
- **Équation** : $\frac{z - 2}{z + 1} = \frac{\bar{z} - 2}{\bar{z} + 1}$ ✓
- **Produit en croix** : $(z - 2)(\bar{z} + 1) = (\bar{z} - 2)(z + 1)$ ✓
- **Développement à gauche** : $z\bar{z} + z - 2\bar{z} - 2$ ✓
- **Développement à droite** : $z\bar{z} + \bar{z} - 2z - 2$ ✓
- **Simplification** : les termes $z\bar{z}$ et -2 s'éliminent ✓
- **Il reste** : $z - 2\bar{z} = \bar{z} - 2z$ ✓
- **Réorganisation** : $3z = 3\bar{z}$, donc $z = \bar{z}$ ✓
- **Conclusion** :

$$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow z \text{ est réel}$$
- **Ensemble solution** : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ✓
- **Contrôle avec $z = 5$** : $Z = \frac{3}{6} = 0,5$, réel ✓
- **Contrôle avec $z = i$** : $Z = \frac{i - 2}{i + 1} = \frac{(i - 2)(1 - i)}{2} = \frac{i + 1 - 2 + 2i}{2} = \frac{-1 + 3i}{2}$ ✓
- **Verdict** : ce n'est pas réel ✓

- **Interprétation géométrique** : Z réel signifie que $\arg \frac{z-2}{z+1}$ vaut 0 ou π ✓
 - **Traduction** : les points d'affixes 2, -1 et z sont **alignés** ✓
 - **Cohérence** : 2 et -1 étant réels, la droite qui les joint est l'axe réel ✓
- Réponse.** Z est réel si et seulement si z est réel : l'ensemble est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Correction de l'exercice 7 - Caractériser un imaginaire pur

- **Critère** : Z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{Z} = -Z$ ✓
- **Équation** : $\frac{\bar{z}+3}{\bar{z}-1} = -\frac{z+3}{z-1}$ ✓
- **Produit en croix** : $(\bar{z}+3)(z-1) = -(z+3)(\bar{z}-1)$ ✓
- **Développement à gauche** : $z\bar{z} - \bar{z} + 3z - 3$ ✓
- **Développement à droite** : $-(z\bar{z} - z + 3\bar{z} - 3) = -z\bar{z} + z - 3\bar{z} + 3$ ✓
- **Équation** : $z\bar{z} - \bar{z} + 3z - 3 = -z\bar{z} + z - 3\bar{z} + 3$ ✓
- **Regroupement** : $2z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} - 6 = 0$ ✓
- **Division par 2** : $z\bar{z} + z + \bar{z} - 3 = 0$ ✓
- **Passage aux coordonnées** : avec $z = x + iy$, on a $z\bar{z} = x^2 + y^2$ et $z + \bar{z} = 2x$ ✓
- **Équation cartésienne** : $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ ✓
- **Complétion du carré** : $(x+1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0$ ✓
- **Forme canonique** :

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$
- **Nature** : le **cercle** de centre $(-1; 0)$ et de rayon 2 ✓
- **Exclusion** : le point $z = 1$, qui appartient à ce cercle ✓
- **Contrôle** : $(1+1)^2 + 0 = 4$ ✓
- **Contrôle avec $z = -3$** : $Z = \frac{0}{-4} = 0$, imaginaire pur ✓
- **Contrôle avec $z = -1 + 2i$** : $Z = \frac{2+2i}{-2+2i} = \frac{(2+2i)(-2-2i)}{8} = \frac{-4-4i-4i+4}{8} = -i$ ✓
- **Interprétation géométrique** : Z imaginaire pur signifie que les vecteurs vers -3 et vers 1 sont **orthogonaux** ✓
- **Cohérence** : c'est le cercle de diamètre $[-3; 1]$ ✓

Réponse. Le cercle de centre -1 et de rayon 2, privé du point 1 (c'est le cercle de diamètre $[-3; 1]$).

Correction de l'exercice 8 - Équation du second degré à coefficients réels

- **Discriminant** : $\Delta = 36 - 136 = -100$ ✓
- **Signe** : $\Delta < 0$, il y a deux racines **complexes conjuguées** ✓
- **Racine carrée de -100** : $10i$ ✓
- **Solutions** :

$$z = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$$
- **Vérification pour $3 + 5i$** : $(3 + 5i)^2 = 9 + 30i - 25 = -16 + 30i$ ✓
- **Puis** : $-16 + 30i - 6(3 + 5i) + 34 = -16 + 30i - 18 - 30i + 34 = 0$ ✓
- **Factorisation** :

$$z^2 - 6z + 34 = (z - 3 - 5i)(z - 3 + 5i)$$
- **Contrôle du développement** : $(z - 3)^2 - (5i)^2 = z^2 - 6z + 9 + 25$ ✓

- **Simplification** : $z^2 - 6z + 34$ ✓
- **Cohérence** : la factorisation est correcte ✓
- **Somme des racines** : 6, conforme à $-\frac{b}{a}$ ✓
- **Produit des racines** : $9 + 25 = 34$, conforme à $\frac{c}{a}$ ✓
- **Modules des racines** : tous deux $\sqrt{34} \approx 5,831$ ✓
- **Interprétation** : les deux racines sont sur un même cercle centré en 0 ✓
- **Contrôle** : le produit des modules vaut 34, le produit des racines ✓
- **Symétrie** : les deux racines sont symétriques par rapport à l'axe réel ✓
- **Règle générale** : pour un polynôme à coefficients **réels**, les racines complexes vont par paires conjuguées ✓

Réponse. $z = 3 \pm 5i$, et $z^2 - 6z + 34 = (z - 3 - 5i)(z - 3 + 5i)$.

Correction de l'exercice 9 - Racines carrées d'un complexe

- **Méthode** : poser $z = x + iy$ et écrire trois équations ✓
- **Première équation** — parties réelles : $x^2 - y^2 = 3$ ✓
- **Deuxième** — parties imaginaires : $2xy = 4$ ✓
- **Troisième** — modules : $x^2 + y^2 = |3 + 4i| = 5$ ✓
- **Utilité de la troisième** : elle se combine avec la première ✓
- **Addition des première et troisième** : $2x^2 = 8$ ✓
- **Donc** : $x^2 = 4$, soit $x = \pm 2$ ✓
- **Soustraction** : $2y^2 = 2$ ✓
- **Donc** : $y^2 = 1$, soit $y = \pm 1$ ✓
- **Rôle de la deuxième équation** : $xy = 2 > 0$, donc x et y sont de **même signe** ✓
- **Solutions retenues** :

$$z = 2 + i \quad \text{ou} \quad z = -2 - i$$
- **Solutions écartées** : $2 - i$ et $-2 + i$ ✓
- **Vérification** : $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$ ✓
- **Contrôle du second** : $(-2 - i)^2 = (2 + i)^2 = 3 + 4i$ ✓
- **Observation** : les deux solutions sont **opposées** ✓
- **Règle générale** : tout complexe non nul a exactement **deux** racines carrées, opposées ✓
- **Contrôle des modules** : $|2 + i| = \sqrt{5}$, et $(\sqrt{5})^2 = 5 = |3 + 4i|$ ✓
- **Remarque** : on ne note **jamais** $\sqrt{3 + 4i}$, la notation radicale étant ambiguë dans $\mathbb{C}$ ✓

Réponse. $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$.

Correction de l'exercice 10 - Équation du second degré à coefficients complexes

- **Discriminant** : $\Delta = (3 + i)^2 - 4(2 + 2i)$ ✓
- **Calcul de $(3 + i)^2$** : $9 + 6i - 1 = 8 + 6i$ ✓
- **Soustraction** : $8 + 6i - 8 - 8i = -2i$ ✓
- **Donc** : $\Delta = -2i$ ✓
- **Recherche d'une racine carrée de $-2i$** : on pose $\delta = x + iy$ ✓
- **Équations** : $x^2 - y^2 = 0$, $2xy = -2$ et $x^2 + y^2 = 2$ ✓
- **Des deux premières** : $x^2 = y^2 = 1$ ✓

- **Signe** : $xy = -1 < 0$, donc x et y sont de signes **opposés** ✓
 - **Racine retenue** : $\delta = 1 - i$ ✓
 - **Vérification** : $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ ✓
 - **Solutions** : $z = \frac{(3 + i) \pm (1 - i)}{2}$ ✓
 - **Première** : $\frac{4 + 0i}{2} = 2$ ✓
 - **Seconde** : $\frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ ✓
 - **Solutions** :

$$z = 2 \quad \text{ou} \quad z = 1 + i$$
 - **Vérification de $z = 2$** : $4 - (3 + i) \times 2 + 2 + 2i = 4 - 6 - 2i + 2 + 2i = 0$ ✓
 - **Vérification de $z = 1 + i$** : $(1 + i)^2 = 2i$, puis $2i - (3 + i)(1 + i) + 2 + 2i$ ✓
 - **Calcul de $(3 + i)(1 + i)$** : $3 + 3i + i - 1 = 2 + 4i$ ✓
 - **Total** : $2i - 2 - 4i + 2 + 2i = 0$ ✓
 - **Contrôle par la somme des racines** : $2 + 1 + i = 3 + i$ ✓
 - **Contrôle par le produit** : $2(1 + i) = 2 + 2i$ ✓
 - **Remarque** : les racines ne sont **pas** conjuguées, les coefficients n'étant pas réels ✓
- Réponse.** $z = 2$ ou $z = 1 + i$.

Correction de l'exercice 11 - Ensemble de points : module constant

- **Première condition** : on réécrit $|z - (2 - i)| = 3$ ✓
- **Interprétation** : la distance de M au point d'affixe $2 - i$ vaut 3 ✓
- **Nature** :

$$\text{le cercle de centre } (2; -1) \text{ et de rayon } 3$$
- **Équation cartésienne** : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ✓
- **Contrôle avec $z = 5 - i$** : $|3| = 3$ ✓
- **Contrôle avec $z = 2 + 2i$** : $|3i| = 3$ ✓
- **Seconde condition** : $|z - 1| = |z - (-3i)|$ ✓
- **Interprétation** : M est équidistant des points d'affixes 1 et $-3i$ ✓
- **Nature** : la **médiatrice** du segment joignant $(1; 0)$ et $(0; -3)$ ✓
- **Milieu** : $(0,5; -1,5)$ ✓
- **Vecteur du segment** : $(-1; -3)$ ✓
- **Équation de la médiatrice** : $-1(x - 0,5) - 3(y + 1,5) = 0$ ✓
- **Développement** : $-x + 0,5 - 3y - 4,5 = 0$ ✓
- **Forme réduite** :

$$x + 3y + 4 = 0 \quad \text{soit} \quad y = -\frac{x + 4}{3}$$

- **Contrôle du milieu** : $0,5 - 4,5 + 4 = 0$ ✓
- **Contrôle par le calcul algébrique** : $|z - 1|^2 = (x - 1)^2 + y^2$ ✓
- **Et** : $|z + 3i|^2 = x^2 + (y + 3)^2$ ✓
- **Égalité** : $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9$ ✓
- **Simplification** : $-2x + 1 = 6y + 9$, soit $2x + 6y + 8 = 0$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien $x + 3y + 4 = 0$ ✓

Réponse. Un cercle de centre $2 - i$ et de rayon 3 ; puis la médiatrice d'équation $x + 3y + 4 = 0$.

Correction de l'exercice 12 - Calculer une somme de puissances

- **Carré** : $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ ✓
- **Puissance quatrième** : $(2i)^2 = -4$ ✓
- **Puissance huitième** : $(-4)^2 = 16$ ✓
- **Observation clé** : $z^8 = 16$ est **réel positif** ✓
- **Conséquence** : les puissances sont cycliques modulo 8, à un facteur près ✓
- **Décomposition de 2026** : $2026 = 8 \times 253 + 2$ ✓
- **Contrôle** : $8 \times 253 = 2024$ ✓
- **Calcul** : $z^{2026} = (z^8)^{253} \times z^2$ ✓
- **Substitution** : $16^{253} \times 2i$ ✓
- **Résultat** :

$$z^{2026} = 2 \times 16^{253} i$$

- **Forme en puissances de 2** : $16^{253} = 2^{1012}$ ✓
- **Donc** : $z^{2026} = 2^{1013} i$ ✓
- **Contrôle par le module** : $|z| = \sqrt{2}$, donc $|z^{2026}| = 2^{1013}$ ✓
- **Vérification** : $(\sqrt{2})^{2026} = 2^{1013}$ ✓
- **Cohérence** : le module du résultat est bien 2^{1013} ✓
- **Contrôle de la nature** : z^{2026} est imaginaire pur ✓
- **Justification** : $2026 \equiv 2 \pmod{8}$, et $z^2 = 2i$ est imaginaire pur ✓
- **Ordre de grandeur** : 2^{1013} compte environ 305 chiffres ✓

Réponse. $z^2 = 2i$, $z^4 = -4$, $z^8 = 16$ et $z^{2026} = 2^{1013}i$.

Correction de l'exercice 13 - Système dans C

- **Méthode** : soustraire les deux équations ✓
- **Soustraction** : $(z + z') - (z - iz') = (3 + i) - (1 - 2i)$ ✓
- **Membre de gauche** : $z' + iz' = z'(1 + i)$ ✓
- **Membre de droite** : $2 + 3i$ ✓
- **Équation** : $z'(1 + i) = 2 + 3i$ ✓
- **Résolution** : $z' = \frac{2 + 3i}{1 + i}$ ✓
- **Multiplication par le conjugué** : $\frac{(2 + 3i)(1 - i)}{2}$ ✓
- **Numérateur** : $2 - 2i + 3i + 3 = 5 + i$ ✓
- **Donc** :

$$z' = \frac{5 + i}{2} = 2,5 + 0,5i$$

- **Calcul de z** : $z = 3 + i - z'$ ✓
- **Résultat** :

$$z = 0,5 + 0,5i$$

- **Vérification de la première équation** : $0,5 + 0,5i + 2,5 + 0,5i = 3 + i$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $iz' = i(2,5 + 0,5i) = 2,5i - 0,5$ ✓
- **Puis** : $z - iz' = 0,5 + 0,5i + 0,5 - 2,5i = 1 - 2i$ ✓
- **Cohérence** : le système est bien satisfait ✓

- **Déterminant du système** : $1 \times (-i) - 1 \times 1 = -i - 1 \neq 0 \checkmark$
- **Conclusion** : la solution est **unique** $\checkmark$
- **Module de z** : $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \checkmark$
- **Module de z'** : $\frac{\sqrt{26}}{2} \approx 2,550 \checkmark$

Réponse. $z = 0,5 + 0,5i$ et $z' = 2,5 + 0,5i$.

Correction de l'exercice 14 - Démontrer une identité

- **Outil** : $|w|^2 = w\bar{w} \checkmark$
- **Premier terme** : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) \checkmark$
- **Conjugué de la somme** : $\bar{z} + \bar{z}' \checkmark$
- **Développement** : $z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \checkmark$
- **Second terme** : $|z - z'|^2 = (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') \checkmark$
- **Développement** : $z\bar{z} - z\bar{z}' - z'\bar{z} + z'\bar{z}' \checkmark$
- **Somme des deux** : les termes croisés **s'annulent** $\checkmark$
- **Il reste** : $2z\bar{z} + 2z'\bar{z}' \checkmark$
- **Conclusion** :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

- **Nom de cette identité** : la **loi du parallélogramme** $\checkmark$
- **Interprétation géométrique** : la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés $\checkmark$
- **Contrôle numérique avec $z = 3 + i$ et $z' = 1 - 2i$** $\checkmark$
- **Somme** : $4 - i$, de module carré 17 $\checkmark$
- **Différence** : $2 + 3i$, de module carré 13 $\checkmark$
- **Somme des deux** : 30 $\checkmark$
- **Modules carrés individuels** : 10 et 5 $\checkmark$
- **Membre de droite** : $2 \times 15 = 30 \checkmark$
- **Cohérence** : l'identité est vérifiée $\checkmark$
- **Conséquence utile** : $|z + z'|^2 \leq 2(|z|^2 + |z'|^2) \checkmark$

Réponse. En développant $|w|^2 = w\bar{w}$, les termes croisés s'annulent : c'est la loi du parallélogramme.

Correction de l'exercice 15 - Ensemble défini par un quotient de modules

- **Traduction** : $|z + 1| = 2|z - 2| \checkmark$
- **Interprétation** : $MA = 2MB$ avec A d'affixe -1 et B d'affixe $2 \checkmark$
- **Passage aux carrés** : $|z + 1|^2 = 4|z - 2|^2 \checkmark$
- **Avec $z = x + iy$** : $(x + 1)^2 + y^2 = 4[(x - 2)^2 + y^2] \checkmark$
- **Développement à gauche** : $x^2 + 2x + 1 + y^2 \checkmark$
- **Développement à droite** : $4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 \checkmark$
- **Équation** : $0 = 3x^2 + 3y^2 - 18x + 15 \checkmark$
- **Division par 3** : $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \checkmark$
- **Complétion du carré** : $(x - 3)^2 - 9 + y^2 + 5 = 0 \checkmark$
- **Forme canonique** :

$$(x - 3)^2 + y^2 = 4$$

- **Nature** : le **cercle** de centre $(3; 0)$ et de rayon 2 ✓
- **Nom de cet ensemble** : un cercle d'**Apollonius** ✓
- **Contrôle avec** $z = 1$: $\left| \frac{2}{-1} \right| = 2$ ✓
- **Vérification dans l'équation** : $(1 - 3)^2 + 0 = 4$ ✓
- **Contrôle avec** $z = 5$: $\left| \frac{6}{3} \right| = 2$ ✓
- **Vérification** : $(5 - 3)^2 = 4$ ✓
- **Contrôle avec** $z = 3 + 2i$: $\left| \frac{4 + 2i}{1 + 2i} \right| = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2$ ✓
- **Exclusion** : $z = 2$ n'appartient pas au cercle ✓
- **Contrôle** : $(2 - 3)^2 = 1 \neq 4$ ✓

Réponse. Le cercle de centre 3 et de rayon 2 (cercle d'Apollonius).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète d'une expression

a) **Multiplication par le conjugué** : par $2 + i$ ✓

- **Dénominateur** : $(2 - i)(2 + i) = 4 + 1 = 5$ ✓
- **Numérateur** : $(1 + 3i)(2 + i) = 2 + i + 6i - 3 = -1 + 7i$ ✓
- **Forme algébrique** :

$$z = \frac{-1 + 7i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

- **Vérification** : $(-0,2 + 1,4i)(2 - i) = -0,4 + 0,2i + 2,8i + 1,4 = 1 + 3i$ ✓

b) **Module par le quotient** : $|z| = \frac{|1 + 3i|}{|2 - i|}$ ✓

- **Calcul** : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ ✓

— **Résultat** :

$$|z| = \sqrt{2} \approx 1,414$$

- **Contrôle par la forme algébrique** : $\sqrt{0,04 + 1,96} = \sqrt{2}$ ✓
- **Produit** $z\bar{z}$: par définition, $|z|^2$ ✓
- **Résultat** :

$$z\bar{z} = 2$$

- **Contrôle direct** : $(-0,2 + 1,4i)(-0,2 - 1,4i) = 0,04 + 1,96 = 2$ ✓

c) **Carré** : $z^2 = (-0,2 + 1,4i)^2$ ✓

- **Développement** : $0,04 - 0,56i - 1,96$ ✓
- **Résultat** :

$$z^2 = -1,92 - 0,56i$$

- **Contrôle du module** : $|z^2| = 2$ ✓
- **Vérification** : $\sqrt{3,6864 + 0,3136} = \sqrt{4} = 2$ ✓
- **Cube** : $z^3 = z^2 \times z$ ✓
- **Calcul** : $(-1,92 - 0,56i)(-0,2 + 1,4i)$ ✓
- **Développement** : $0,384 - 2,688i + 0,112i + 0,784$ ✓

— **Résultat :**

$$z^3 = 1,168 - 2,576i$$

— **Contrôle du module :** $|z^3| = 2\sqrt{2} \approx 2,828 \checkmark$

— **Vérification :** $\sqrt{1,364224 + 6,635776} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \checkmark$

— **Pour** z^{12} : son module vaut $(\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64 \checkmark$

— **Calcul par les puissances successives :** $z^4 = (z^2)^2 \checkmark$

— **Développement :** $(-1,92 - 0,56i)^2 = 3,6864 + 2,1504i - 0,3136 \checkmark$

— **Donc :** $z^4 = 3,3728 + 2,1504i \checkmark$

— **Puis :** $z^{12} = (z^4)^3 \checkmark$

— **Valeur approchée :** $z^{12} \approx -8,42 + 63,44i \checkmark$

— **Contrôle du module :** $\sqrt{70,9 + 4025,1} \approx 64,0 \checkmark$

d) **Condition :** $|w - z| = |z| = \sqrt{2} \checkmark$

— **Interprétation :** la distance de M au point d'affixe z vaut $\sqrt{2} \checkmark$

— **Nature :**

le cercle de centre $\left(-\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$

— **Équation cartésienne :** $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 = 2 \checkmark$

— **Remarque géométrique :** ce cercle passe par l'**origine** $\checkmark$

— **Justification :** la distance de z à 0 vaut précisément $|z| = \sqrt{2} \checkmark$

— **Contrôle :** $0,04 + 1,96 = 2 \checkmark$

— **Autre point du cercle :** $2z$, à distance $|z|$ de $z \checkmark$

— **Affixe :** $-0,4 + 2,8i \checkmark$

— **Contrôle :** $|2z - z| = |z| = \sqrt{2} \checkmark$

— **Diamètre du cercle :** $2\sqrt{2} \approx 2,828 \checkmark$

— **Points diamétralement opposés :** 0 et $2z \checkmark$

Réponse. a) $z = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ · b) $|z| = \sqrt{2}$ et $z\bar{z} = 2$ · c) $z^2 = -1,92 - 0,56i$, $z^3 = 1,168 - 2,576i$, $|z^{12}| = 64$ · d) le cercle de centre z et de rayon $\sqrt{2}$, passant par l'origine.