Plaquette 4 – Le plan complexe : affixes, distances et configurations

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Affixe d'un point, affixe d'un vecteur. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Le point $M(x\,;y)$ a pour affixe $z_M = x + iy$; réciproquement, $z = x + iy$ est l'affixe du point de coordonnées $(x\,;y)$.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \qquad z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}} \qquad z_{k\vec{u}} = k\,z_{\vec{u}} \quad (k \text{ réel})$$

Distance. Le module mesure une longueur :

$$AB = |z_B - z_A| \qquad OM = |z_M|$$

Milieu et symétrique. Si I est le milieu de $[AB]$ et A' le symétrique de A par rapport à B :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \qquad z_{A'} = 2z_B - z_A$$

Configurations usuelles.

- $ABCD$ est un **parallélogramme** si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $z_B - z_A = z_C - z_D$.
- A, B, C sont **alignés** si et seulement si $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ pour un **réel** k ; autrement dit, si le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.
- Un triangle est **rectangle en** B si $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (réciproque de Pythagore), **isocèle en** B si $AB = BC$.

Symétries lues sur l'affixe. Si M a pour affixe z :

transformation	affixe de l'image
symétrie d'axe $(O\,;\vec{u})$	$\overline{z}$
symétrie d'axe $(O\,;\vec{v})$	$-\overline{z}$
symétrie de centre O	$-z$
translation de vecteur $\vec{w}$	$z + z_{\vec{w}}$

Deux ensembles de points à reconnaître d'un coup d'œil.

$$|z - z_\Omega| = r \iff M \in \text{cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } r$$

$$|z - z_A| = |z - z_B| \iff M \in \text{médiatrice de } [AB]$$

Correction de l'exercice 1 – Des affixes aux coordonnées, et retour

Le point d'affixe $x + iy$ (avec x, y réels) a pour coordonnées $(x\,;y)$: la partie réelle donne l'abscisse, la partie imaginaire l'ordonnée.

a) $A(3\,;-2)$, $B(-1\,;4)$, $C(0\,;-5)$ car $-5i = 0 + (-5)i$, et $D(2\,;0)$ car $2 = 2 + 0i$.

b) Inversement, $E(0\,;-3)$ a pour affixe $-3i$, $F(-4\,;1)$ a pour affixe $-4 + i$ (l'ordonnée 1 donne $+i$, et non $+1$), et $G(6\,;0)$ a pour affixe 6.

c) Un point est sur l'axe des réels quand son ordonnée est nulle, donc quand son affixe

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

est réelle : c'est le cas de D et G. Il est sur l'axe des imaginaires purs quand son abscisse est nulle : c'est le cas de C et E.

$$z = x + iy \quad \leftrightarrow \quad M(x\,;y)$$

Réponse. a) $A(3\,;-2)$, $B(-1\,;4)$, $C(0\,;-5)$, $D(2\,;0)$ · b) $z_E = -3i$, $z_F = -4+i$, $z_G = 6$ · c) axe des réels : D et G ; axe des imaginaires purs : C et E.

Correction de l'exercice 2 – Affixe d'un vecteur

L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtient en soustrayant l'affixe du point de départ à celle du point d'arrivée :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-1+4i) - (3-2i) = -4+6i$$

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$: $z_{\overrightarrow{BA}} = 4-6i$. De même, $z_{\overrightarrow{AC}} = -5i-(3-2i) = -3-3i$. L'affixe d'une somme de vecteurs est la somme des affixes : $z_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}} = (-4+6i)+(-3-3i) = -7+3i$. **Contrôle** par les coordonnées : $A(3\,;-2)$ et $B(-1\,;4)$ donnent bien $\overrightarrow{AB}(-4\,;6)$.

Réponse. $z_{\overrightarrow{AB}} = -4+6i$, $z_{\overrightarrow{BA}} = 4-6i$, $z_{\overrightarrow{AC}} = -3-3i$ et $z_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}} = -7+3i$.

Correction de l'exercice 3 – Distances

La distance entre deux points est le module de la différence de leurs affixes : $AB = |z_B - z_A|$. Avec les affixes de vecteurs de l'exercice précédent :

$$AB = |-4+6i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}211 \qquad AC = |-3-3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}243$$

et $BC = |z_C - z_B| = |1-9i| = \sqrt{82} \approx 9{,}055$. **Contrôle** par l'inégalité triangulaire : $9{,}055 \leq 7{,}211 + 4{,}243$, le triangle ABC n'est pas aplati.

Réponse. $AB = 2\sqrt{13} \approx 7{,}211$, $AC = 3\sqrt{2} \approx 4{,}243$ et $BC = \sqrt{82} \approx 9{,}055$.

Correction de l'exercice 4 – Milieu d'un segment

L'affixe du milieu est la moyenne des affixes des extrémités :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(3-2i)+(-1+4i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

Vérification : $z_A - z_I = 2-3i$ et $z_B - z_I = -2+3i$ ont le même module $\sqrt{13}$, donc $IA = IB = \sqrt{13}$, la moitié de $AB = 2\sqrt{13}$ (exercice 3). Ces deux affixes sont opposées : c'est la traduction de $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, qui caractérise le milieu.

Réponse. $z_I = 1+i$, et $IA = IB = \sqrt{13}$.

Correction de l'exercice 5 – Compléter un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (dans cet ordre des lettres, $[AB]$ et $[DC]$ sont des côtés opposés). Sur les affixes :

$$z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B = (3-2i)+(-5i)-(-1+4i) = 4-11i$$

Contrôle par les diagonales, qui doivent avoir le même milieu : $\dfrac{z_A+z_C}{2} = \dfrac{3-7i}{2}$ et $\dfrac{z_B+z_D}{2} = \dfrac{3-7i}{2}$. Attention : la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ décrirait le parallélogramme $ABDC$.

Réponse. $z_D = 4-11i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Tester un alignement

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Ici

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3-3i}{-4+6i} = \frac{(-3-3i)(-4-6i)}{16+36} = \frac{-6+30i}{52} = -\frac{3}{26} + \frac{15}{26}i$$

Sa partie imaginaire n'est pas nulle : les trois points ne sont pas alignés. **Contrôle** par les coordonnées : $\overrightarrow{AB}(-4\,;6)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;-3)$ ont pour déterminant $(-4)(-3) - 6\times(-3) = 30 \neq 0$.

Réponse. Non : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\dfrac{3}{26} + \dfrac{15}{26}i$ n'est pas réel, les points ne sont pas alignés.

Correction de l'exercice 7 – Symétrique d'un point par rapport à un autre

A' est le symétrique de A par rapport à B lorsque B est le milieu de $[AA']$:

$$z_B = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \Leftrightarrow z_{A'} = 2z_B - z_A = (-2+8i) - (3-2i) = -5+10i$$

Contrôle : $\dfrac{(3-2i)+(-5+10i)}{2} = -1+4i = z_B$. On vérifie aussi que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ ont des affixes opposées, $4-6i$ et $-4+6i$, donc la même longueur $2\sqrt{13}$.

Réponse. $z_{A'} = -5+10i$.

Correction de l'exercice 8 – Les symétries lues sur l'affixe

Le point M a pour coordonnées $(4\,;-3)$. La symétrie d'axe des réels change l'ordonnée en son opposé : l'image a pour affixe $\overline{z} = 4+3i$. La symétrie d'axe des imaginaires purs change l'abscisse en son opposé : $-\overline{z} = -4-3i$. La symétrie de centre O change les deux : $-z = -4+3i$.

La translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ ajoute l'affixe de $\overrightarrow{w}$:

$$z' = z + z_{\overrightarrow{w}} = (4-3i) + (-2+5i) = 2+2i$$

Contrôle : les trois symétries conservent la distance à O (les quatre affixes z, $\overline{z}$, $-\overline{z}$, $-z$ ont pour module 5), alors que la translation ne la conserve pas : $|2+2i| = 2\sqrt{2}$.

Réponse. Symétrie d'axe des réels : $4+3i$ · axe des imaginaires purs : $-4-3i$ · centre O : $-4+3i$ · translation : $2+2i$.

Correction de l'exercice 9 – Un cercle

$|z - z_\Omega|$ est la distance ΩM. La condition $|z-(2+i)| = 3$ signifie donc que M est à la distance 3 du point $\Omega(2\,;1)$:

$$E \text{ est le cercle de centre } \Omega(2\,;1) \text{ et de rayon } 3$$

Pour D d'affixe 2, on a $|2-(2+i)| = |-i| = 1 \neq 3$: D n'est pas sur le cercle ; il est même à l'intérieur, puisque $\Omega D = 1 < 3$. Attention au signe : $|z+2+i| = 3$ décrirait le cercle de centre $-2-i$, car $|z+2+i| = |z-(-2-i)|$.

Réponse. E est le cercle de centre $\Omega(2\,;1)$ et de rayon 3 ; D n'y appartient pas (il est à l'intérieur, car $\Omega D = 1$).

Correction de l'exercice 10 – Une médiatrice

On écrit $|z+3i| = |z-(-3i)|$. Avec $A(1\,;0)$ d'affixe 1 et $B(0\,;-3)$ d'affixe $-3i$, la condition s'écrit $AM = BM$: F est la médiatrice du segment $[AB]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour son équation, on pose $z = x + iy$ et l'on élève au carré (les deux membres sont positifs) :

$$(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = 6y + 9 \Leftrightarrow x + 3y + 4 = 0$$

Contrôle : le milieu de $[AB]$, $(0{,}5\,;-1{,}5)$, vérifie $0{,}5 - 4{,}5 + 4 = 0$, et le vecteur normal $(1\,;3)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}(-1\,;-3)$.

Réponse. F est la médiatrice de $[AB]$ avec $A(1\,;0)$ et $B(0\,;-3)$, d'équation $x + 3y + 4 = 0$.

Correction de l'exercice 11 – Une droite verticale déguisée

$|z|$ est la distance OM et $|z-4|$ la distance AM, avec $A(4\,;0)$. La condition $OM = AM$ décrit la médiatrice de $[OA]$, qui est verticale puisque $[OA]$ est porté par l'axe des réels. Par le calcul, avec $z = x + iy$:

$$x^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2 \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = 2$$

G est la droite d'équation $x = 2$, formée des points d'affixe de partie réelle 2. **Contrôle** : pour $z = 2 + 5i$, $|z| = \sqrt{29}$ et $|z-4| = |-2+5i| = \sqrt{29}$.

Réponse. G est la droite d'équation $x = 2$, c'est-à-dire l'ensemble des points d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(z) = 2$.

Correction de l'exercice 12 – Nature d'un triangle

On calcule les trois longueurs à l'aide des modules :

$$AB = |3+i| = \sqrt{10} \qquad BC = |-1+3i| = \sqrt{10} \qquad AC = |2+4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Comme $AB = BC$, le triangle est isocèle en B. De plus $AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20 = AC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est rectangle en B. Le triangle ABC est donc rectangle isocèle en B, d'aire $\dfrac{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}{2} = 5$. **Contrôle** : $\overrightarrow{BA}(-3\,;-1)$ et $\overrightarrow{BC}(-1\,;3)$ ont un produit scalaire nul, $3 - 3 = 0$.

Réponse. $AB = BC = \sqrt{10}$ et $AC = 2\sqrt{5}$ avec $AB^2 + BC^2 = AC^2$: ABC est rectangle isocèle en B (aire 5).

Correction de l'exercice 13 – Cercle circonscrit

Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. L'angle droit étant en B, l'hypoténuse est $[AC]$:

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{(1+2i)+(3+6i)}{2} = 2 + 4i \qquad R = \frac{AC}{2} = \sqrt{5}$$

Le cercle circonscrit est l'ensemble des points d'affixe z telle que $|z - (2+4i)| = \sqrt{5}$. **Contrôle** : $|z_A - z_\Omega| = |-1-2i| = \sqrt{5}$, $|z_B - z_\Omega| = |2-i| = \sqrt{5}$ et $|z_C - z_\Omega| = |1+2i| = \sqrt{5}$.

Réponse. $z_\Omega = 2 + 4i$ et $R = \sqrt{5}$; le cercle circonscrit est l'ensemble des points d'affixe z telle que $|z - (2+4i)| = \sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 14 – Une condition sur un paramètre

Le point M_t a pour coordonnées $(t+1\,;2t-4)$.

a) Il est sur l'axe des réels quand son ordonnée est nulle : $2t - 4 = 0$, soit $t = 2$ (et M_2 a pour affixe 3).

b) Il est sur la droite $y = x$ quand $2t - 4 = t + 1$, soit $t = 5$ (et M_5 a pour affixe $6 + 6i$).

c) On élimine t : $x = t + 1$ donne $t = x - 1$, et en remplaçant dans $y = 2t - 4$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$y = 2(x-1) - 4 = 2x - 6$$

Tous les points M_t sont sur cette droite, donc alignés ; et comme $x = t + 1$ prend toutes les valeurs réelles, ils la décrivent entièrement. **Contrôle** : $M_0(1\,;-4)$ vérifie $2 \times 1 - 6 = -4$.

Réponse. a) $t = 2$ · b) $t = 5$ · c) tous les points M_t sont sur la droite d'équation $y = 2x - 6$.

Correction de l'exercice 15 – Trajet d'un drone

a) Deux déplacements successifs s'ajoutent, donc leurs affixes aussi :

$$z_B = z_A + z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}} = (2 + 3i) + (4 - i) + (-1 + 5i) = 5 + 7i$$

Le drone est à $OB = |z_B| = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \approx 8{,}602$ km de la base.

b) Il a parcouru $|\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{17} + \sqrt{26} \approx 4{,}123 + 5{,}099 = 9{,}222$ km, alors que $AB = |z_B - z_A| = |3 + 4i| = 5$ km. C'est l'inégalité triangulaire : $|\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$, avec égalité seulement si les deux vols ont la même direction et le même sens.

c) Il lui reste $12 - 9{,}222 = 2{,}778$ km d'autonomie, bien moins que les 8,602 km du retour : il ne peut pas rentrer directement.

Réponse. a) $z_B = 5 + 7i$ et $OB = \sqrt{74} \approx 8{,}602$ km · b) $\sqrt{17} + \sqrt{26} \approx 9{,}222$ km parcourus, contre $AB = 5$ km à vol d'oiseau · c) non : il ne reste que 2,778 km d'autonomie pour un retour de 8,602 km.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).