Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : démonstrations, suites et ensembles de points

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux caractérisations à savoir démontrer. Pour tout complexe z :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z \qquad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

Elles se démontrent en posant $z = a + ib$: $\overline{z} = z$ donne $-b = b$, donc $b = 0$.

Compatibilité de la conjugaison. C'est l'outil qui permet de conjuguer une expression entière sans la développer :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

En particulier, pour un **réel** a : $\overline{a} = a$. C'est ce qui fait marcher la propriété des racines conjuguées.

Le module, et le carré du module. Pour $z = x + iy$:

$$|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad z + \overline{z} = 2x \qquad z - \overline{z} = 2iy$$

Ces trois relations transforment toute équation en z et $\overline{z}$ en équation en x et y.

Développer un carré de module. Identité centrale de la plaquette :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$$

Elle se démontre en développant $(z + z')\overline{(z + z')}$.

Suites de complexes. Si $z_{n+1} = q\,z_n$, alors $z_n = q^n z_0$ et, en passant aux modules, $|z_n| = |q|^n |z_0|$: la suite des modules est **géométrique réelle** de raison $|q|$. Elle tend vers 0 si $|q| < 1$.

Ensembles de points, les trois réflexes.

— $|z - z_\Omega| = r$: cercle de centre Ω, de rayon r.
— $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$.
— Toute autre condition : poser $z = x + iy$, développer, et reconnaître la forme $ax + by + c = 0$ (droite) ou $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ (cercle).

Correction de l'exercice 1 – Réel ou imaginaire pur : les deux démonstrations de base

On pose $z = a + ib$ avec a, b réels, de sorte que $\overline{z} = a - ib$.

a) En ajoutant, les parties imaginaires s'éliminent ; en soustrayant, ce sont les parties réelles :

$$z + \overline{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z) \qquad z - \overline{z} = 2ib = 2i\mathrm{Im}(z)$$

Le premier est réel ; le second est le produit de i par le réel $2b$, donc imaginaire pur, ou nul si $b = 0$.

b) $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, somme de deux carrés de réels : c'est un réel positif, égal à $|z|^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le conjugué de $S = z^2 + \overline{z}^2$ est $\overline{z}^2 + z^2 = S$, donc S est réel. Explicitement, $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ et $\overline{z}^2 = a^2 - b^2 - 2iab$, d'où $S = 2\left(a^2 - b^2\right)$. **Contrôle** : pour $z = 3 + 2i$, $(5 + 12i) + (5 - 12i) = 10 = 2(9 - 4)$.

Réponse. a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ · b) $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$ · c) $z^2 + \overline{z}^2 = 2\left(\mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Complexes de module 1

a) On sait que $z\overline{z} = |z|^2$. Comme $|z| = 1$, on obtient $z\overline{z} = 1$; z n'est pas nul (son module vaut 1), donc on peut diviser par z :

$$\overline{z} = \frac{1}{z}$$

b) Par conséquent $z + \dfrac{1}{z} = z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, d'après l'exercice 1 : c'est un réel. En écrivant $z = x + iy$ avec $x^2 + y^2 = 1$, on a $x^2 \leq 1$, donc $-1 \leq x \leq 1$ et $-2 \leq z + \dfrac{1}{z} \leq 2$. Les bornes sont atteintes pour $z = 1$ et $z = -1$. **Contrôle** : pour $z = i$, $z + \dfrac{1}{z} = i - i = 0$.

Réponse. a) $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ car $z\overline{z} = 1$ · b) $z + \dfrac{1}{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, réel compris entre -2 et 2.

Correction de l'exercice 3 – Un quotient imaginaire pur

w est bien défini puisque $z \neq 1$. Un complexe est imaginaire pur ou nul si et seulement s'il est égal à l'opposé de son conjugué. Comme $|z| = 1$, on a $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ (exercice 2), donc

$$\overline{w} = \frac{1 + \overline{z}}{1 - \overline{z}} = \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z + 1}{z - 1} = -\frac{1 + z}{1 - z} = -w$$

en multipliant numérateur et dénominateur par z. Donc w est imaginaire pur ou nul ; il est nul seulement pour $z = -1$. **Contrôle** : pour $z = i$, $w = \dfrac{1 + i}{1 - i} = i$. Attention : en conjuguant w, il faut conjuguer z aussi.

Réponse. $\overline{w} = \dfrac{z + 1}{z - 1} = -w$, donc w est imaginaire pur (nul uniquement pour $z = -1$).

Correction de l'exercice 4 – Racines conjuguées d'un polynôme réel

On conjugue les deux membres de l'égalité $az_0^2 + bz_0 + c = 0$. Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, celui d'un produit le produit des conjugués, et $\overline{0} = 0$:

$$\overline{a}\,(\overline{z_0})^2 + \overline{b}\,\overline{z_0} + \overline{c} = 0$$

Comme a, b et c sont réels, ils sont égaux à leurs conjugués, et il reste $a(\overline{z_0})^2 + b\,\overline{z_0} + c = 0$: $\overline{z_0}$ est aussi solution. L'hypothèse « coefficients réels » est indispensable : $z^2 - (1 + i)z + i = (z - 1)(z - i)$ a pour racines 1 et i, qui ne sont pas conjuguées. La même démonstration vaut pour un polynôme réel de degré quelconque.

Réponse. En conjuguant l'égalité et en utilisant $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b$, $\overline{c} = c$ (coefficients réels), on obtient $a(\overline{z_0})^2 + b\overline{z_0} + c = 0$.

Correction de l'exercice 5 – Polynôme de degré 3 à racine évidente

a) $P(3) = 27 - 27 + 12 - 12 = 0$: 3 est racine de P.

b) On développe $(z - 3)\left(\alpha z^2 + \beta z + \gamma\right) = \alpha z^3 + (\beta - 3\alpha)z^2 + (\gamma - 3\beta)z - 3\gamma$ et l'on identifie avec P : $\alpha = 1$, $\beta - 3 = -3$ donc $\beta = 0$, et $-3\gamma = -12$ donc $\gamma = 4$. Le coefficient de z,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\gamma - 3\beta = 4$, est bien celui de P.

$$P(z) = (z-3)\left(z^2+4\right)$$

c) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est : $z = 3$, ou $z^2 = -4 = (2i)^2$, c'est-à-dire $z = 2i$ ou $z = -2i$. Donc $S = \{3\,;2i\,;-2i\}$. Les deux racines non réelles sont conjuguées, comme l'annonçait l'exercice 4.

Réponse. a) $P(3) = 0$ · b) $P(z) = (z-3)\left(z^2+4\right)$ · c) $S = \{3\,;2i\,;-2i\}$.

Correction de l'exercice 6 – Degré 3 avec une racine rationnelle

On teste les valeurs $\frac{p}{2}$ avec p diviseur de 20. Pour $z = \frac{5}{2}$: $2\times\frac{125}{8} - 5\times\frac{25}{4} + 8\times\frac{5}{2} - 20 = \frac{125}{4} - \frac{125}{4} + 20 - 20 = 0$. La racine $\frac{5}{2}$ correspond au facteur $2z-5$, et l'identification de $(2z-5)\left(z^2+\beta z+\gamma\right)$ avec le polynôme donne $-5\gamma = -20$ et $2\beta - 5 = -5$, soit $\gamma = 4$ et $\beta = 0$:

$$2z^3 - 5z^2 + 8z - 20 = (2z-5)\left(z^2+4\right)$$

Les solutions sont $\frac{5}{2}$, $2i$ et $-2i$. **Contrôle** : le coefficient de z vaut $2\gamma - 5\beta = 8$, et la somme des racines, $\frac{5}{2}$, est bien égale à $-\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$.

Réponse. $S = \left\langle \frac{5}{2}\,;2i\,;-2i \right\rangle$.

Correction de l'exercice 7 – Un système dans C

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires réels s'appliquent telles quelles dans $\mathbb{C}$. On isole $z = 7 + i - 2w$ dans la première équation et l'on remplace dans la seconde :

$$3(7+i-2w) - w = 7 + 10i \Leftrightarrow -7w = -14 + 7i \Leftrightarrow w = 2 - i$$

puis $z = 7 + i - 2(2-i) = 3 + 3i$. **Contrôle** : $(3+3i) + 2(2-i) = 7 + i$ et $3(3+3i) - (2-i) = 7 + 10i$. Le déterminant du système, $1\times(-1) - 2\times 3 = -7$, est non nul : la solution est unique.

Réponse. $z = 3 + 3i$ et $w = 2 - i$.

Correction de l'exercice 8 – Une équation où z et son conjugué se mêlent

On passe d'abord aux modules : $|z^2| = |z|^2$ et $|\overline{z}| = |z|$, donc $|z|^2 = |z|$, soit $|z|(|z|-1) = 0$. Deux cas se présentent.

Si $|z| = 0$, alors $z = 0$, qui est bien solution. Si $|z| = 1$, alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et l'équation devient $z^2 = \frac{1}{z}$, soit $z^3 = 1$. Or $z^3 - 1 = (z-1)\left(z^2+z+1\right)$, et $z^2+z+1 = 0$ a pour discriminant -3 :

$$z = 1 \qquad z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \qquad z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

Ces trois nombres sont de module 1, donc conviennent : $S = \left\langle 0\,;1\,;\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,;\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right\rangle$.

Contrôle : pour $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{z}$. Le passage aux modules ne donne qu'une condition nécessaire : il faut ensuite revenir à l'équation.

Réponse. $S = \left\langle 0\,;1\,;\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,;\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right\rangle$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Développer un carré de module

a) On utilise $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ avec $Z = z + z'$:

$$|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z'$$

Les deux termes du milieu sont conjugués l'un de l'autre, car $\overline{z\overline{z'}} = \overline{z}z'$; or $Z + \overline{Z} = 2\mathrm{Re}(Z)$, donc leur somme vaut $2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$.

b) En remplaçant z' par $-z'$, on obtient $|z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$. En additionnant, les termes en Re s'éliminent : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

c) Dans le parallélogramme $OACB$ construit sur $\overrightarrow{OA}$ d'affixe z et $\overrightarrow{OB}$ d'affixe z', les diagonales mesurent $|z+z'|$ et $|z-z'|$: la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés. **Contrôle** avec $z = 3 + i$ et $z' = 1 + 2i$: $|4+3i|^2 + |2-i|^2 = 25 + 5 = 30 = 2(10+5)$.

Réponse. a) et b) démontrés par $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ · c) dans un parallélogramme, la somme des carrés des deux diagonales vaut la somme des carrés des quatre côtés.

Correction de l'exercice 10 – Un cercle caché derrière une équation en z et son conjugué

Avec $z = x + iy$, on a $z\overline{z} = x^2 + y^2$ et $z + \overline{z} = 2x$. L'équation devient

$$x^2 + y^2 - 4x = 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9$$

C est le cercle de centre $\Omega(2\,;0)$ et de rayon 3, c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $|z-2| = 3$. **Contrôle** : $|z-2|^2 = (z-2)(\overline{z}-2) = z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4$, et $|z-2|^2 = 9$ redonne bien l'équation de départ. Le point d'affixe 5 vérifie $25 - 2\times 10 = 5$.

Réponse. C est le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 3, d'équation complexe $|z-2| = 3$.

Correction de l'exercice 11 – Quand le carré est imaginaire pur

Avec $z = x + iy$, on calcule

$$z^2 = (x+iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xy\,i$$

z^2 est imaginaire pur quand sa partie réelle est nulle : $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0$, soit $y = x$ ou $y = -x$. D est la réunion des deux droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ (les bissectrices des axes), privée de l'origine, exclue par l'énoncé. **Contrôle** : $(3+3i)^2 = 18i$ et $(3-3i)^2 = -18i$, alors que $(2+i)^2 = 3 + 4i$ ne convient pas.

Réponse. D est la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$, privée de l'origine.

Correction de l'exercice 12 – Un rapport de distances

Avec $A(2i)$ et $B(i)$, la condition s'écrit $AM = 2BM$: à cause du facteur 2, ce n'est pas une médiatrice. On pose $z = x + iy$ et l'on élève au carré :

$$x^2 + (y-2)^2 = 4\left[x^2 + (y-1)^2\right] \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

A est le cercle de centre d'affixe $\frac{2}{3}i$ et de rayon $\frac{2}{3}$. **Contrôle** : l'origine en fait partie, car $|0-2i| = 2 = 2|0-i|$; le point $\frac{4}{3}i$ aussi, car $\left|-\frac{2}{3}i\right| = \frac{2}{3} = 2\times\frac{1}{3}$. Un rapport de distances

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\frac{AM}{BM} = k \neq 1$ donne toujours un cercle.

Réponse. A est le cercle de centre d'affixe $\frac{2}{3}i$ et de rayon $\frac{2}{3}$ (il passe par l'origine).

Correction de l'exercice 13 – Une suite de complexes

Chaque terme est le précédent multiplié par $q = \frac{1+i}{2}$.

a) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, puis $z_2 = q^2 = \frac{(1+i)^2}{4} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$, puis $z_3 = \frac{1+i}{2} \times \frac{i}{2} = \frac{i+i^2}{4} = \frac{-1+i}{4}$.

b) Le module d'un produit est le produit des modules, donc $|z_{n+1}| = |q|\,|z_n|$ avec $|q| = \frac{\sqrt{2}}{2}$: la suite des modules est géométrique de premier terme 1, et

$$|z_n| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 2^{-n/2}$$

c) On a $|z_{13}| = 2^{-6,5} \approx 0{,}0110 \geq 0{,}01$ et $|z_{14}| = 2^{-7} = \frac{1}{128} \approx 0{,}0078 < 0{,}01$; comme la suite des modules est décroissante, le plus petit entier convenable est $n = 14$. Les points M_n se rapprochent de l'origine en tournant.

Réponse. a) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$, $z_3 = \frac{-1+i}{4}$ · b) $|z_n| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 2^{-n/2}$ · c) $n = 14$.

Correction de l'exercice 14 – Somme des termes d'une suite de complexes

a) La suite est géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$ et de premier terme 1, donc $z_n = q^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

b) On additionne les parties réelles et imaginaires de $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$ et $z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$:

$$S_3 = \left(1 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4}\right) + \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)i = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$$

c) La formule de la somme des termes d'une suite géométrique reste valable dans $\mathbb{C}$ pour $q \neq 1$: $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Comme $1 - q = \frac{1-i}{2}$, on obtient $S_n = \frac{2\left(1-q^{n+1}\right)}{1-i}$. **Contrôle** pour $n = 3$: $q^4 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$, donc $S_3 = \frac{2 \times \frac{5}{4}}{1-i} = \frac{5(1+i)}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$.

Réponse. a) $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ · b) $S_3 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$ · c) $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{2\left(1-q^{n+1}\right)}{1-i}$ avec $q = \frac{1+i}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Un test d'appartenance à l'ensemble de Mandelbrot

a) On applique $u_{n+1} = u_n^2 + c$ en calculant chaque carré sous forme algébrique :
$u_1 = c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $u_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}i$, donc $u_2 = -\frac{1}{2}i + c = -\frac{1}{2}$;
$u_3 = \frac{1}{4} + c = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$; enfin $u_3^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4}i - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}i$, donc

$$u_4 = -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{11}{16} + \frac{1}{4}i$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Les modules valent $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$, $0{,}5$, $\sqrt{0{,}3125} \approx 0{,}559$ et $\sqrt{0{,}5352} \approx 0{,}732$: ils restent tous inférieurs à 2, le critère d'arrêt n'est pas déclenché et le programme continue.

c) Pour $c = 1$, tous les termes sont réels : $u_1 = 1$, $u_2 = 1^2 + 1 = 2$, $u_3 = 2^2 + 1 = 5$. Comme $|u_3| = 5 > 2$, le critère est déclenché : $c = 1$ n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot.

Réponse. a) $u_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $u_2 = -\dfrac{1}{2}$, $u_3 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}i$, $u_4 = -\dfrac{11}{16} + \dfrac{1}{4}i$ · b) modules $\approx 0{,}707$; $0{,}500$; $0{,}559$; $0{,}732$, tous inférieurs à 2 : pas d'arrêt · c) pour $c = 1$, $|u_3| = 5 > 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).