

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : démonstrations, suites et ensembles de points

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux caractérisations à savoir démontrer. Pour tout complexe z :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

Elles se démontrent en posant $z = a + ib$: $\bar{z} = z$ donne $-b = b$, donc $b = 0$.

Compatibilité de la conjugaison. C'est l'outil qui permet de conjuguer une expression entière sans la développer :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'} \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

En particulier, pour un **réel** a : $\bar{a} = a$. C'est ce qui fait marcher la propriété des racines conjuguées.

Le module, et le carré du module. Pour $z = x + iy$:

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad z + \bar{z} = 2x \quad z - \bar{z} = 2iy$$

Ces trois relations transforment toute équation en z et $\bar{z}$ en équation en x et y .

Développer un carré de module. Identité centrale de la plaquette :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z'})$$

Elle se démontre en développant $(z + z')\overline{(z + z')}$.

Suites de complexes. Si $z_{n+1} = qz_n$, alors $z_n = q^n z_0$ et, en passant aux modules, $|z_n| = |q|^n |z_0|$: la suite des modules est **géométrique réelle** de raison $|q|$. Elle tend vers 0 si $|q| < 1$.

Ensembles de points, les trois réflexes.

- $|z - z_\Omega| = r$: cercle de centre Ω , de rayon r .
- $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$.
- Toute autre condition : poser $z = x + iy$, développer, et reconnaître la forme $ax + by + c = 0$ (droite) ou $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ (cercle).

Correction de l'exercice 1 - Réel ou imaginaire pur : les deux démonstrations de base

- **Point de départ** : on pose $z = a + ib$ avec a et b **réels** ✓
- **Conjugué** : $\bar{z} = a - ib$ ✓
- **a) Somme** : $(a + ib) + (a - ib)$ ✓
- **Les parties imaginaires s'annulent** : $+ib - ib = 0$ ✓
- **Résultat** :

$$z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

- **Conclusion** : $2a$ est réel, donc $z + \bar{z}$ est réel ✓
- **Différence** : $(a + ib) - (a - ib)$ ✓

— **Les parties réelles s'annulent** : $a - a = 0$ ✓

— **Résultat** :

$$z - \bar{z} = 2ib = 2i\text{Im}(z)$$

— **Conclusion** : c'est i multiplié par le réel $2b$, donc un imaginaire pur — ou 0 si $b = 0$ ✓

— **b) Produit** : $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2$ ✓

— **Calcul** : $a^2 + b^2$ ✓

— **Résultat** :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

— **Signe** : une somme de deux carrés de réels est positive ✓

— **c) Méthode par conjugaison** : posons $S = z^2 + \bar{z}^2$ ✓

— **Conjugué de S** : $\bar{S} = \overline{z^2 + \bar{z}^2} = \bar{z}^2 + z^2$ ✓

— **Donc** : $\bar{S} = S$, ce qui prouve que S est réel ✓

— **Calcul explicite** : $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ et $\bar{z}^2 = a^2 - b^2 - 2iab$ ✓

— **Somme** :

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2)$$

— **Contrôle sur un exemple** : pour $z = 3 + 2i$, $z^2 = 5 + 12i$ et $\bar{z}^2 = 5 - 12i$ ✓

— **Somme** : 10, et $2(9 - 4) = 10$ ✓

Réponse. a) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ · b) $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$ · c)
 $z^2 + \bar{z}^2 = 2(\text{Re}(z)^2 - \text{Im}(z)^2)$.

Correction de l'exercice 2 - Complexes de module 1

— **a) Relation du cours** : $z\bar{z} = |z|^2$ ✓

— **Hypothèse** : $|z| = 1$, donc $|z|^2 = 1$ ✓

— **Égalité obtenue** :

$$z\bar{z} = 1$$

— **Remarque préalable** : $z \neq 0$, car $|z| = 1 \neq 0$, la division est donc licite ✓

— **On divise par z** :

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

— **Conclusion** : pour un complexe de module 1, l'inverse et le conjugué coïncident ✓

— **Exemple de contrôle** : $z = i$ a pour module 1, $\frac{1}{i} = -i = \bar{i}$ ✓

— **b) Substitution** : $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z}$ ✓

— **Or** : $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, démontré à l'exercice 1 ✓

— **Résultat** :

$$z + \frac{1}{z} = 2\text{Re}(z)$$

— **Conclusion** : c'est un réel ✓

— **Encadrement** : pour $z = x + iy$ avec $x^2 + y^2 = 1$, on a $x^2 \leq 1$ ✓

— **Donc** : $-1 \leq x \leq 1$ ✓

— **Encadrement final** :

$$-2 \leq z + \frac{1}{z} \leq 2$$

- **Cas d'égalité** : 2 pour $z = 1$, et -2 pour $z = -1$ ✓
 - **Contrôle** : pour $z = i$, $z + \frac{1}{z} = i - i = 0$, bien compris entre -2 et 2 ✓
 - **Remarque** : c'est le point de départ de la formule d'Euler, vue au chapitre suivant ✓
- Réponse.** a) $\frac{1}{z} = \bar{z}$ car $z\bar{z} = 1$ · b) $z + \frac{1}{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, réel compris entre -2 et 2 .

Correction de l'exercice 3 - Un quotient imaginaire pur

- **Existence de w** : $z \neq 1$, donc $1 - z \neq 0$, le quotient est bien défini ✓
- **Critère à utiliser** : w est imaginaire pur ou nul si et seulement si $\bar{w} = -w$ ✓
- **On conjugue le quotient** : la conjugaison est compatible avec le quotient ✓
- **Expression** :

$$\bar{w} = \frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$$

- **Hypothèse utilisée** : $|z| = 1$, donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$ (exercice 2) ✓
- **Substitution** :

$$\bar{w} = \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}}$$

- **On met au même dénominateur, en haut** : $1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$ ✓
- **De même, en bas** : $1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$ ✓
- **Quotient de deux quotients** : les z se simplifient ✓
- **Expression obtenue** :

$$\bar{w} = \frac{z+1}{z-1}$$

- **Lien avec w** : le dénominateur $z - 1$ est l'opposé de $1 - z$ ✓
- **Donc** :

$$\bar{w} = -\frac{1+z}{1-z} = -w$$

- **Conclusion** : $\bar{w} = -w$, donc w est imaginaire pur ou nul ✓
- **Cas nul** : $w = 0$ équivaut à $z = -1$ ✓
- **Contrôle sur un exemple** : pour $z = i$, $w = \frac{1+i}{1-i} = i$, bien imaginaire pur ✓
- **Second exemple** : pour $z = -i$, $w = \frac{1-i}{1+i} = -i$ ✓
- **Erreur à éviter** : conjuguer en écrivant $\bar{w} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$ — il faut conjuguer z aussi ✓

Réponse. $\bar{w} = \frac{z+1}{z-1} = -w$, donc w est imaginaire pur (nul uniquement pour $z = -1$).

Correction de l'exercice 4 - Racines conjuguées d'un polynôme réel

- **Hypothèse** : $az_0^2 + bz_0 + c = 0$ ✓
- **Idée de la démonstration** : conjuguer les **deux membres** de cette égalité ✓
- **Conjugué du membre de droite** : $\bar{0} = 0$ ✓
- **Conjugué du membre de gauche** : on utilise la compatibilité avec la somme ✓

— **Décomposition :**

$$\overline{az_0^2 + bz_0 + c} = \overline{az_0^2} + \overline{bz_0} + \overline{c}$$

— **Compatibilité avec le produit :** $\overline{az_0^2} = \overline{a} \times \overline{z_0^2}$ ✓— **Point clé de toute la démonstration :** a, b, c sont **réels**, donc $\overline{a} = a, \overline{b} = b, \overline{c} = c$ ✓— **Puissance :** $\overline{z_0^2} = (\overline{z_0})^2$ ✓— **Égalité obtenue :**

$$a(\overline{z_0})^2 + b\overline{z_0} + c = 0$$

— **Conclusion :** $\overline{z_0}$ est bien solution de la même équation ✓— **Contrôle sur un exemple :** $z^2 - 6z + 13 = 0$ a pour solution $3 + 2i$ ✓— **Vérification du conjugué :** $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$ ✓— **Calcul complet :** $5 - 12i - 18 + 12i + 13 = 0$ ✓— **Où l'hypothèse est indispensable :** pour $z^2 - (1 + i)z + i = 0$, les coefficients ne sont pas réels ✓— **Solutions de cette équation :** 1 et i , qui ne sont **pas** conjuguées ✓— **Portée du résultat :** il vaut pour un polynôme de **n'importe quel degré** à coefficients réels, la démonstration est identique ✓

Réponse. En conjuguant l'égalité et en utilisant $\overline{a} = a, \overline{b} = b, \overline{c} = c$ (coefficients réels), on obtient $a(\overline{z_0})^2 + b\overline{z_0} + c = 0$.

Correction de l'exercice 5 - Polynôme de degré 3 à racine évidente

— **a) Calcul :** $P(3) = 27 - 3 \times 9 + 4 \times 3 - 12$ ✓— **Détail :** $27 - 27 + 12 - 12$ ✓— **Résultat :** $P(3) = 0$, donc 3 est bien racine ✓— **b) Méthode :** on développe la forme voulue et on identifie les coefficients ✓— **Développement :** $(z - 3)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - 3\alpha z^2 - 3\beta z - 3\gamma$ ✓— **Regroupement :** $\alpha z^3 + (\beta - 3\alpha)z^2 + (\gamma - 3\beta)z - 3\gamma$ ✓— **Identification du terme en z^3 :** $\alpha = 1$ ✓— **Identification du terme constant :** $-3\gamma = -12$, donc $\gamma = 4$ ✓— **Identification du terme en z^2 :** $\beta - 3 = -3$, donc $\beta = 0$ ✓— **Contrôle avec le terme en z :** $\gamma - 3\beta = 4 - 0 = 4$ ✓— **Cohérence :** c'est bien le coefficient de z dans P ✓— **Factorisation :**

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + 4)$$

— **c) Produit nul :** un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ✓— **Premier facteur :** $z - 3 = 0$ donne $z = 3$ ✓— **Second facteur :** $z^2 + 4 = 0$, donc $z^2 = -4$ ✓— **Résolution :** $z^2 = (2i)^2$, donc $z = 2i$ ou $z = -2i$ ✓— **Ensemble des solutions :**

$$S = \{3; 2i; -2i\}$$

— **Contrôle :** les deux racines non réelles sont **conjuguées**, conformément à l'exercice 4 ✓— **Contrôle par le produit des racines :** $3 \times 2i \times (-2i) = 12$ ✓— **Comparaison :** pour $z^3 + az^2 + bz + c$, le produit des racines vaut $-c = 12$ ✓

Réponse. a) $P(3) = 0$ · b) $P(z) = (z - 3)(z^2 + 4)$ · c) $S = \{3; 2i; -2i\}$.

Correction de l'exercice 6 - Degré 3 avec une racine rationnelle

- **Recherche de la racine** : on teste les valeurs $\frac{p}{2}$ dont le numérateur divise 20 ✓
- **Essai** $z = \frac{5}{2}$: $2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = 2 \times \frac{125}{8} = \frac{125}{4}$ ✓
- **Deuxième terme** : $-5 \times \frac{25}{4} = -\frac{125}{4}$ ✓
- **Troisième et quatrième** : $8 \times \frac{5}{2} - 20 = 20 - 20 = 0$ ✓
- **Somme** : $\frac{125}{4} - \frac{125}{4} + 0 = 0$ ✓
- **Conclusion** : $\frac{5}{2}$ est racine ✓
- **Factorisation** : le facteur correspondant est $2z - 5$, ce qui évite les fractions ✓
- **Forme cherchée** : $2z^3 - 5z^2 + 8z - 20 = (2z - 5)(z^2 + \beta z + \gamma)$ ✓
- **Terme constant** : $-5\gamma = -20$, donc $\gamma = 4$ ✓
- **Terme en z^2** : $2\beta - 5 = -5$, donc $\beta = 0$ ✓
- **Contrôle du terme en z** : $2\gamma - 5\beta = 8$ ✓
- **Factorisation** :

$$2z^3 - 5z^2 + 8z - 20 = (2z - 5)(z^2 + 4)$$

- **Premier facteur nul** : $z = \frac{5}{2} = 2,5$ ✓
- **Second facteur nul** : $z^2 = -4$, donc $z = 2i$ ou $z = -2i$ ✓
- **Ensemble des solutions** :

$$S = \left\{\frac{5}{2}; 2i; -2i\right\}$$

- **Contrôle par la somme des racines** : $\frac{5}{2} + 2i - 2i = \frac{5}{2}$ ✓
- **Comparaison** : la somme vaut $\frac{5}{2}$, soit $-\frac{-5}{2}$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien $-\frac{b}{a}$ avec $a = 2$ et $b = -5$ ✓

Réponse. $S = \left\{\frac{5}{2}; 2i; -2i\right\}$.

Correction de l'exercice 7 - Un système dans $\mathbb{C}$

- **Remarque préalable** : $\mathbb{C}$ est un corps, les méthodes de résolution des systèmes réels s'y appliquent telles quelles ✓
- **Méthode choisie** : substitution ✓
- **On isole z dans la première équation** : $z = 7 + i - 2w$ ✓
- **On remplace dans la seconde** : $3(7 + i - 2w) - w = 7 + 10i$ ✓
- **Développement** : $21 + 3i - 6w - w = 7 + 10i$ ✓
- **Réduction** : $21 + 3i - 7w = 7 + 10i$ ✓
- **On isole** : $-7w = 7 + 10i - 21 - 3i$ ✓
- **Calcul** : $-7w = -14 + 7i$ ✓
- **On divise par -7** :

$$w = 2 - i$$

- **Retour à la première équation** : $z = 7 + i - 2(2 - i) \checkmark$
- **Développement** : $7 + i - 4 + 2i \checkmark$
- **Résultat** :

$$z = 3 + 3i$$

- **Vérification, première équation** : $(3 + 3i) + 2(2 - i) = 3 + 3i + 4 - 2i = 7 + i \checkmark$
- **Vérification, seconde équation** : $3(3 + 3i) - (2 - i) = 9 + 9i - 2 + i = 7 + 10i \checkmark$
- **Cohérence** : le couple convient $\checkmark$
- **Unicité** : le déterminant du système vaut $1 \times (-1) - 2 \times 3 = -7 \neq 0 \checkmark$
- **Conclusion** : le système est de Cramer, la solution est unique $\checkmark$

Réponse. $z = 3 + 3i$ et $w = 2 - i$.

Correction de l'exercice 8 - Une équation où z et son conjugué se mêlent

- **Première idée** : passer aux modules, pour trouver les modules possibles $\checkmark$
- **Modules des deux membres** : $|z^2| = |z|^2$ et $|\bar{z}| = |z| \checkmark$
- **Équation sur les modules** : $|z|^2 = |z| \checkmark$
- **Factorisation** : $|z|(|z| - 1) = 0 \checkmark$
- **Deux cas** : $|z| = 0$ ou $|z| = 1 \checkmark$
- **Premier cas** : $|z| = 0$ donne $z = 0 \checkmark$
- **Vérification** : $0^2 = 0 = \bar{0} \checkmark$
- **Second cas** : $|z| = 1$, donc $z\bar{z} = 1$, c'est-à-dire $\bar{z} = \frac{1}{z} \checkmark$
- **On remplace dans l'équation** : $z^2 = \frac{1}{z} \checkmark$
- **On multiplie par z** (licite car $z \neq 0$) :

$$z^3 = 1$$

- **Factorisation** : $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) \checkmark$
- **Première racine** : $z = 1 \checkmark$
- **Les autres** : $z^2 + z + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 \checkmark$
- **Racine de l'opposé** : $\sqrt{3} \checkmark$
- **Solutions** :

$$z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

- **Ensemble complet** :

$$S = \left\{ 0; 1; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

- **Vérification d'une racine non réelle** : pour $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$,
 $z^2 = \frac{1 - 2i\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} \checkmark$
- **Simplification** : $z^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{z} \checkmark$
- **Cohérence** : l'équation est satisfaite $\checkmark$
- **Piège** : passer aux modules donne une condition **nécessaire**, jamais suffisante — il faut revenir à l'équation $\checkmark$

Réponse. $S = \left\{ 0; 1; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Correction de l'exercice 9 - Développer un carré de module

- **a) Point de départ** : $|Z|^2 = Z\bar{Z}$ appliqué à $Z = z + z'$ ✓
- **Écriture** : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'})$ ✓
- **On conjugue la somme** : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ✓
- **Développement** : $(z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}'$ ✓
- **Les deux termes extrêmes** : $z\bar{z} = |z|^2$ et $z'\bar{z}' = |z'|^2$ ✓
- **Les deux termes du milieu** : observons que $z'\bar{z} = \overline{z\bar{z}'}$ ✓
- **Justification** : $\overline{z\bar{z}'} = \bar{z} \times \bar{\bar{z}'} = \bar{z}z'$ ✓
- **Donc ces deux termes sont conjugués l'un de l'autre** ✓
- **Or** : pour tout complexe Z , $Z + \bar{Z} = 2\text{Re}(Z)$ ✓
- **Somme des deux termes du milieu** : $2\text{Re}(z\bar{z}')$ ✓
- **Identité démontrée** :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}(z\bar{z}')$$

- **b) On applique à $-z'$** : $|z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\text{Re}(z\bar{z}')$ ✓
- **Justification du signe** : $\overline{-z'} = -\bar{z}'$ et $|-z'| = |z'|$ ✓
- **On additionne les deux identités** : les termes en Re se compensent ✓
- **Résultat** :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

- **c) Interprétation** : soit $OACB$ le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ d'affixe z et $\overrightarrow{OB}$ d'affixe z' ✓
- **Les diagonales** : $[OC]$ a pour longueur $|z + z'|$ et $[AB]$ pour longueur $|z - z'|$ ✓
- **Énoncé géométrique** : dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés ✓
- **Contrôle numérique** : pour $z = 3 + i$ et $z' = 1 + 2i$, $z + z' = 4 + 3i$ et $z - z' = 2 - i$ ✓
- **Membre de gauche** : $25 + 5 = 30$ ✓
- **Membre de droite** : $2(10 + 5) = 30$ ✓

Réponse. a) et b) démontrés par $|Z|^2 = Z\bar{Z}$. c) dans un parallélogramme, la somme des carrés des deux diagonales vaut la somme des carrés des quatre côtés.

Correction de l'exercice 10 - Un cercle caché derrière une équation en z et son conjugué

- **Méthode** : traduire chaque bloc avec $z = x + iy$, x et y réels ✓
- **Premier bloc** : $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ ✓
- **Second bloc** : $z + \bar{z} = 2x$ ✓
- **Équation obtenue** : $x^2 + y^2 - 2 \times 2x = 5$ ✓
- **Simplification** : $x^2 + y^2 - 4x = 5$ ✓
- **Mise sous forme canonique en x** : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ ✓
- **Équation** : $(x - 2)^2 - 4 + y^2 = 5$ ✓
- **On isole** :

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9$$

- **Reconnaissance** : équation d'un cercle ✓

- **Centre** : $\Omega(2; 0)$, d'affixe 2 ✓
- **Rayon** : $\sqrt{9} = 3$ ✓
- **Conclusion** :

C est le cercle de centre $\Omega(2; 0)$ et de rayon 3

- **Écriture complexe équivalente** : $|z - 2| = 3$ ✓
- **Vérification de cette équivalence** : $|z - 2|^2 = (z - 2)\overline{(z - 2)}$ ✓
- **Développement** : $z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4$ ✓
- **Donc** : $|z - 2|^2 = 9$ redonne bien $z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) = 5$ ✓
- **Contrôle avec un point** : $z = 5$ ✓
- **Calcul** : $25 - 2 \times 10 = 5$ ✓
- **Cohérence** : 5 est bien à distance 3 de 2 ✓

Réponse. C est le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 3, d'équation complexe $|z - 2| = 3$.

Correction de l'exercice 11 - Quand le carré est imaginaire pur

- **Mise en place** : $z = x + iy$ avec x et y réels ✓
- **Carré** : $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ ✓
- **Forme algébrique** :

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

- **Condition « imaginaire pur »** : la partie réelle est nulle ✓
- **Équation** : $x^2 - y^2 = 0$ ✓
- **Factorisation** : $(x - y)(x + y) = 0$ ✓
- **Deux cas** : $y = x$ ou $y = -x$ ✓
- **Conclusion géométrique** : D est la réunion des deux droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ ✓
- **Exclusion** : le point O est exclu, car z est supposé non nul ✓
- **Précision utile** : en O , $z^2 = 0$, qui est imaginaire pur par convention mais exclu ici par l'énoncé ✓
- **Contrôle sur $y = x$** : pour $z = 3 + 3i$, $z^2 = 9 + 18i - 9 = 18i$ ✓
- **Cohérence** : imaginaire pur ✓
- **Contrôle sur $y = -x$** : pour $z = 3 - 3i$, $z^2 = 9 - 18i - 9 = -18i$ ✓
- **Cohérence** : imaginaire pur également ✓
- **Contre-exemple hors de D** : pour $z = 2 + i$, $z^2 = 3 + 4i$, dont la partie réelle vaut $3 \neq 0$ ✓
- **Remarque** : ces deux droites sont les **bissectrices** des axes du repère ✓
- **À comparer** : z^2 réel donne $2xy = 0$, soit la réunion des deux **axes** ✓

Réponse. D est la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$, privée de l'origine.

Correction de l'exercice 12 - Un rapport de distances

- **Lecture** : avec A d'affixe $2i$ et B d'affixe i , la condition s'écrit $AM = 2BM$ ✓
- **Attention** : ce n'est **pas** une médiatrice, à cause du facteur 2 ✓
- **Méthode** : poser $z = x + iy$ et élever au carré ✓
- **Membre de gauche** : $|x + i(y - 2)|^2 = x^2 + (y - 2)^2$ ✓
- **Membre de droite** : $4|x + i(y - 1)|^2 = 4[x^2 + (y - 1)^2]$ ✓

- **Équation** : $x^2 + (y - 2)^2 = 4x^2 + 4(y - 1)^2$ ✓
- **Développement à gauche** : $x^2 + y^2 - 4y + 4$ ✓
- **Développement à droite** : $4x^2 + 4y^2 - 8y + 4$ ✓
- **On rassemble** : $0 = 3x^2 + 3y^2 - 4y$ ✓
- **On divise par 3** : $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$ ✓
- **Forme canonique en y** : $y^2 - \frac{4}{3}y = \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$ ✓
- **Équation obtenue** :

$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

- **Reconnaissance** : cercle de centre $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$ ✓
- **Affixe du centre** : $\frac{2}{3}i$ ✓
- **Conclusion** :

A est le cercle de centre $\frac{2}{3}i$ et de rayon $\frac{2}{3}$

- **Observation** : ce cercle passe par l'origine, car $|0 - 2i| = 2$ et $2|0 - i| = 2$ ✓
- **Second point de contrôle** : $z = \frac{4}{3}i$ ✓
- **Calcul** : $\left|\frac{4}{3}i - 2i\right| = \frac{2}{3}$ et $2\left|\frac{4}{3}i - i\right| = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Cohérence** : ce point appartient bien à A ✓
- **À retenir** : un rapport de distances $\frac{AM}{BM} = k$ avec $k \neq 1$ donne toujours un **cercle**, et non une droite ✓

Réponse. A est le cercle de centre d'affixe $\frac{2}{3}i$ et de rayon $\frac{2}{3}$ (il passe par l'origine).

Correction de l'exercice 13 - Une suite de complexes

- **Nature de la suite** : chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par le complexe $q = \frac{1+i}{2}$ ✓
- **a) Premier terme** : $z_1 = \frac{1+i}{2} \times 1$ ✓
- **Résultat** :

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

- **Deuxième terme** : $z_2 = \frac{1+i}{2} \times \frac{1+i}{2} = \frac{(1+i)^2}{4}$ ✓
- **Or** : $(1+i)^2 = 2i$ ✓
- **Résultat** :

$$z_2 = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$$

- **Troisième terme** : $z_3 = \frac{1+i}{2} \times \frac{i}{2} = \frac{i+i^2}{4}$ ✓
- **Résultat** :

$$z_3 = \frac{-1+i}{4}$$

- **b) Module de la raison** : $|q| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark$
- **Passage aux modules** : $|z_{n+1}| = |q| \times |z_n| \checkmark$
- **Conséquence** : la suite $(|z_n|)$ est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $|z_0| = 1 \checkmark$
- **Expression** :

$$|z_n| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

- **Contrôle** : $|z_2| = \frac{1}{2}$, et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \checkmark$
- **Second contrôle** : $|z_3| = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354$, et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \approx 0,354 \checkmark$
- **c) Inéquation** : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 0,01 \checkmark$
- **Écriture en puissance de 2** : $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-1/2}$, donc $|z_n| = 2^{-n/2} \checkmark$
- **Valeurs successives** : $|z_{12}| = 2^{-6} = \frac{1}{64} \approx 0,0156 \checkmark$
- **Suivante** : $|z_{13}| = 2^{-6,5} \approx 0,0110 \checkmark$
- **Suivante** : $|z_{14}| = 2^{-7} = \frac{1}{128} \approx 0,0078 \checkmark$
- **Conclusion** : le plus petit entier convenant est $n = 14 \checkmark$
- **Interprétation géométrique** : les points M_n se rapprochent de l'origine, le module tendant vers 0 car $|q| < 1 \checkmark$

Réponse. a) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$, $z_3 = \frac{-1+i}{4}$ · b) $|z_n| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 2^{-n/2}$ · c) $n = 14$.

Correction de l'exercice 14 - Somme des termes d'une suite de complexes

- **a) Forme explicite** : la suite est géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$ et de premier terme $z_0 = 1 \checkmark$
- **Formule du cours** : $z_n = z_0 \times q^n \checkmark$
- **Résultat** :

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

- **Vérification** : pour $n = 2$, $\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2} \checkmark$
- **Cohérence** : c'est bien le z_2 trouvé précédemment $\checkmark$
- **b) On additionne les quatre premiers termes** $\checkmark$
- **Liste** : $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$, $z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \checkmark$
- **Parties réelles** : $1 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} \checkmark$
- **Calcul** : $\frac{4}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \checkmark$
- **Parties imaginaires** : $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \checkmark$
- **Calcul** : $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \checkmark$

— **Résultat :**

$$S_3 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$$

— **c) Formule de la somme géométrique :** elle est valable dans $\mathbb{C}$ dès que $q \neq 1$ ✓

— **Ici :** $q = \frac{1+i}{2} \neq 1$, la formule s'applique ✓

— **Expression :**

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{avec} \quad q = \frac{1+i}{2}$$

— **Calcul du dénominateur :** $1 - \frac{1+i}{2} = \frac{2-1-i}{2} = \frac{1-i}{2}$ ✓

— **Expression simplifiée :**

$$S_n = \frac{2(1 - q^{n+1})}{1 - i}$$

— **Contrôle avec $n = 3$:** $q^4 = (q^2)^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$ ✓

— **Numérateur :** $2\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}$ ✓

— **Quotient :** $\frac{5}{2(1-i)} = \frac{5(1+i)}{2 \times 2} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$ ✓

— **Cohérence :** on retrouve bien le S_3 du b) ✓

Réponse. a) $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ · b) $S_3 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$ · c) $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{2(1 - q^{n+1})}{1 - i}$ avec $q = \frac{1+i}{2}$.

Correction de l'exercice 15 - Un test d'appartenance à l'ensemble de Mandelbrot

— **a) Premier terme :** $u_1 = u_0^2 + c = 0 + c$ ✓

— **Résultat :**

$$u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

— **Deuxième terme :** il faut d'abord u_1^2 ✓

— **Carré :** $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i^2$ ✓

— **Simplification :** $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}i$ ✓

— **On ajoute c :** $-\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ✓

— **Résultat :**

$$u_2 = -\frac{1}{2}$$

— **Troisième terme :** $u_2^2 = \frac{1}{4}$ ✓

— **On ajoute c :** $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ✓

— **Résultat :**

$$u_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

- **Quatrième terme** : $u_3^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4}i + \frac{1}{4}i^2 = -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}i$ ✓
- **On ajoute c** : $-\frac{3}{16} - \frac{8}{16} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)i$ ✓
- **Résultat** :

$$u_4 = -\frac{11}{16} + \frac{1}{4}i$$

- **b) Module de u_1** : $\sqrt{0,25 + 0,25} = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ ✓
- **Module de u_2** : $0,5$ ✓
- **Module de u_3** : $\sqrt{0,0625 + 0,25} = \sqrt{0,3125} \approx 0,559$ ✓
- **Module de u_4** : $\sqrt{0,4727 + 0,0625} = \sqrt{0,5352} \approx 0,732$ ✓
- **Comparaison au seuil** : les quatre modules restent inférieurs à 2 ✓
- **Conclusion** : le critère d'arrêt n'est pas déclenché, le programme poursuit les itérations ✓
- **c) Cas $c = 1$** : $u_1 = 0^2 + 1 = 1$ ✓
- **Terme suivant** : $u_2 = 1^2 + 1 = 2$ ✓
- **Terme suivant** : $u_3 = 2^2 + 1 = 5$ ✓
- **Module** : $|u_3| = 5 > 2$ ✓
- **Conclusion** : le critère est déclenché dès u_3 , le point $c = 1$ n'appartient pas à l'ensemble ✓
- **Remarque** : ici tous les termes sont réels, la suite est croissante et diverge vers $+\infty$ ✓

Réponse. a) $u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $u_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$, $u_4 = -\frac{11}{16} + \frac{1}{4}i$ · b) modules $\approx 0,707$; $0,500$; $0,559$; $0,732$, tous inférieurs à 2 : pas d'arrêt · c) pour $c = 1$, $|u_3| = 5 > 2$.