Plaquette 3 – Calcul algébrique : identités, puissances de i et inverses

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

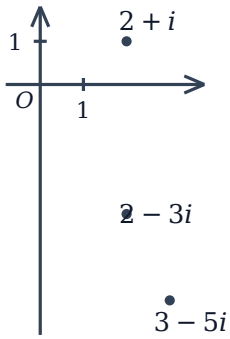
Exercices

Méthode

Cette plaquette muscle le **calcul**. On développe, on factorise, on inverse, on élève à des puissances élevées. Trois réflexes suffisent : $i^2 = -1$, la périodicité de i^n modulo 4, et la multiplication par le conjugué du dénominateur. Les identités remarquables restent valables dans $\mathbb{C}$: ce sont les mêmes qu'en Terminale spé, seul i^2 change la fin du calcul.

Exercice 1 – Développer et réduire

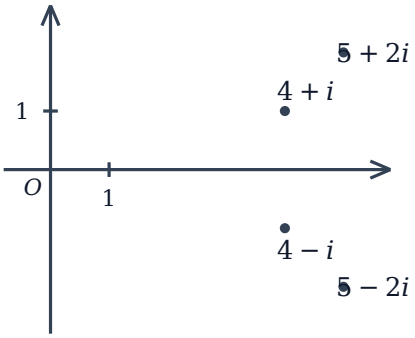
Mettre sous forme algébrique $(2+i)(3-5i)$, $(1+i)^3$ et $(2-3i)^2$.



Les nombres à multiplier

Exercice 2 – Produit d'un complexe par son conjugué

Calculer $(4+i)(4-i)$ et $(5-2i)(5+2i)$. En déduire $|4+i|$ et $|5-2i|$ sans calculer de somme de carrés.

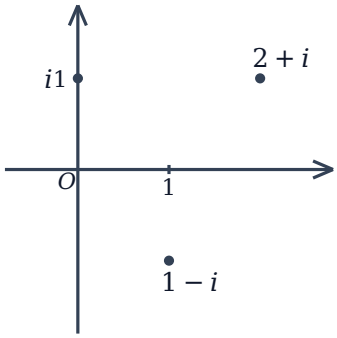


Deux couples de nombres conjugués

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Inverses

Mettre sous forme algébrique $\frac{1}{2+i}$, $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{1-i}$.



Les nombres dont on cherche l'inverse

Exercice 4 – Quotients

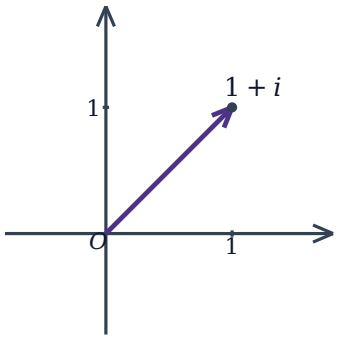
Mettre sous forme algébrique $\frac{3+i}{2-i}$, $\frac{1+i}{1-i}$ et $\frac{2i}{3+4i}$.

Exercice 5 – Puissances de i à exposant élevé

Calculer i^{2027}, i^{-13} et la somme $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2026}$.

Exercice 6 – Les puissances de 1 + i

Calculer $(1+i)^2$, $(1+i)^4$ et $(1+i)^8$. En déduire $(1+i)^{2026}$ sous forme algébrique.



Le point d'affixe $1 + i$

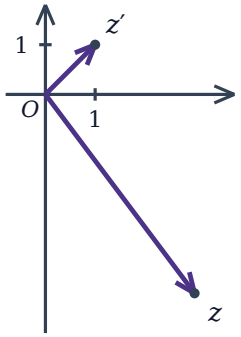
Exercice 7 – Conjuguer un quotient de deux façons

Soit $z = \frac{2-i}{1+3i}$. Mettre z sous forme algébrique, puis calculer $\overline{z}$ de deux façons différentes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Modules d'expressions composées

On pose $z = 3 - 4i$ et $z' = 1 + i$. Calculer $|z|$, $|zz'|$, $\left|\frac{z}{z'}\right|$ et $\left|z^5\right|$ **sans** mettre ces nombres sous forme algébrique.



Les vecteurs d'affixes z et z'

Exercice 9 – Réel ou imaginaire pur selon un paramètre

Pour tout réel m, on pose $z_m = \frac{m+i}{1-i}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles z_m est réel, puis celles pour lesquelles z_m est imaginaire pur.

Exercice 10 – Équation où le conjugué apparaît

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z - 2\overline{z} = 5 + 15i$.

Exercice 11 – Second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Exercice 12 – Second degré avec a différent de 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 2z + 5 = 0$.

Exercice 13 – Somme et produit des racines

Soit z_1 et z_2 les solutions de $z^2 - 4z + 29 = 0$. Sans les calculer, donner $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, puis calculer $z_1^2 + z_2^2$. Vérifier ensuite en résolvant l'équation.

Exercice 14 – Factoriser un polynôme dans C

a) Factoriser $P(z) = z^2 + 2z + 10$ dans $\mathbb{C}$.

b) On pose $Q(z) = z^4 + 2z^2 + 10$. Expliquer pourquoi la formule du second degré ne s'applique pas directement à Q, puis factoriser Q en un produit de deux polynômes du second degré en posant $Z = z^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Impédance d’un circuit RLC

En électricité, un circuit RLC série est décrit par son **impédance complexe**

$$Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

où R est la résistance en ohms. Pour un circuit donné, $R = 30\ \Omega$, $L\omega = 55\ \Omega$ et $\frac{1}{C\omega} = 15\ \Omega$. a) Donner Z sous forme algébrique, puis calculer $|Z|$ (l’impédance apparente, en ohms).

b) La loi d’Ohm complexe s’écrit $U = Z\,I$, où U et I désignent les grandeurs **complexes** associées à la tension et à l’intensité. Pour $U = 230$, calculer I sous forme algébrique, puis $|I|$ en ampères, arrondi au centième.

c) Le circuit est dit **résistif** lorsque Z est réel. À quelle condition sur $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$ est-ce le cas ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).